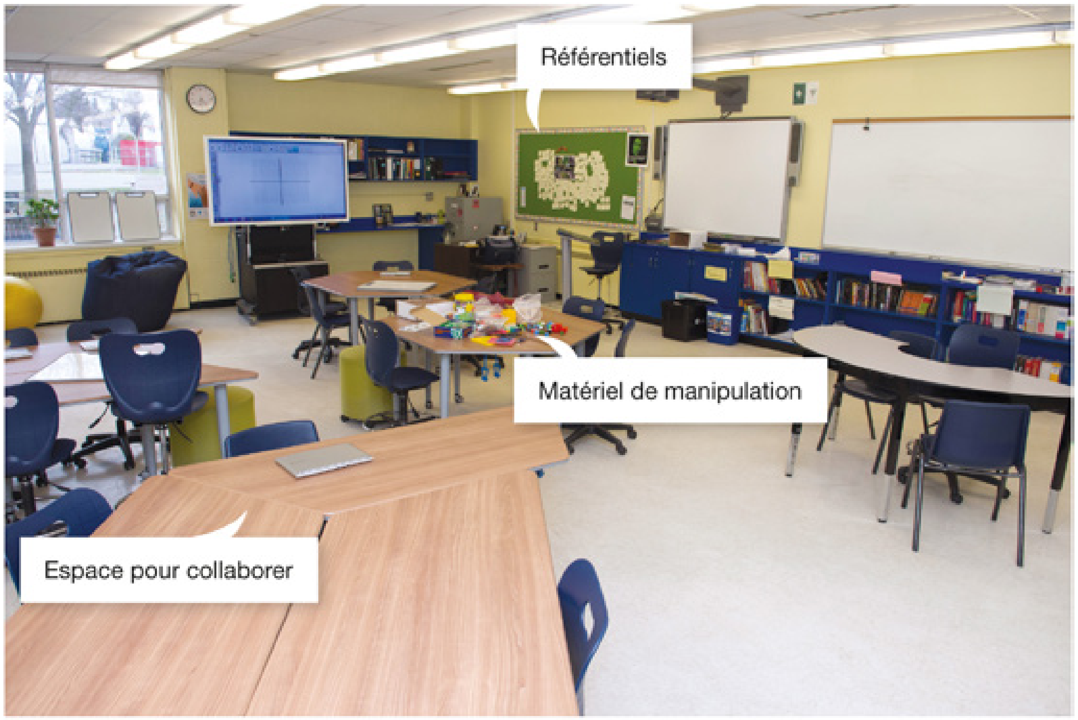
B. UN ENVIRONNEMENT PROPICE À L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES COMPORTE L'OPTIMISATION DE L'ORGANISATION PHYSIQUE DE LA SALLE DE CLASSE

L'objectif qu'a défini le ministère de l'Éducation de l'Ontario, qui est d'atteindre l'excellence pour toutes et tous les élèves, comprend le développement des aptitudes à communiquer, à collaborer et à raisonner de façon critique. L'enseignante ou l'enseignant doit réfléchir à l'organisation de l'espace de la salle de classe, à la disponibilité des diverses ressources et aux différents modes de communication axés sur le développement du raisonnement en vue d'accompagner les élèves dans l'acquisition de ces aptitudes.

Organiser un espace pour les travaux de collaboration

L'aménagement de la salle de classe devrait favoriser la communication entre les élèves, que ce soit pour poser des questions, échanger au sujet d'un problème ou résoudre un problème. En bref, la salle de classe devrait favoriser la collaboration.



L’espace physique

Dans la monographie Le troisième enseignant (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2013b), il est précisé que :

> […] [l’espace] physique de l’apprentissage des mathématiques devrait comprendre :
>
> - Des espaces où les élèves peuvent se servir de matériel de manipulation pour résoudre les problèmes et noter leurs solutions.
> - Des espaces sur des tableaux ou le mur pour exposer les solutions des élèves [(notamment pour l’échange mathématique, la galerie des stratégies et le bansho)]. Les solutions des élèves devraient être visibles depuis l’espace de réunion en groupe.
> - Un espace pour afficher les référentiels créés ensemble, tels que les termes de glossaire et les résumés précédents et actuels de l’apprentissage qui appuient spécifiquement le développement des grandes idées en cours d’étude.
> - Du matériel didactique organisé de façon à ce que tous les élèves puissent y accéder facilement; ces ressources peuvent comprendre du matériel de manipulation mathématique, des calculatrices et d’autres outils mathématiques, des textes mathématiques et de la technologie portable. (p. 2)

Au cours d’une étude menée durant plusieurs années, Peter Liljedhal (2015) a analysé l’espace de travail des élèves. Le but était de déterminer si l’espace de travail avait une incidence sur le raisonnement des apprenantes et des apprenants. En d’autres mots, le chercheur voulait savoir s’il était possible de créer des classes qui « raisonnent » en « variant » l’espace de travail qu’il définit comme un endroit où l’on entend des discussions, où l’on a des preuves que les élèves révisent leur approche et où l’on voit la communication des connaissances dans cette communauté d’apprenantes et d’apprenants.

Les données de sa recherche ont confirmé qu’en travaillant en équipes les élèves sont plus motivées et motivés à commencer les tâches, discutent davantage, prennent part au travail et persévèrent.

L'espace social

« […] [L]a clé de l'apprentissage n'est pas seulement l'**espace physique** offert aux élèves, mais aussi l'**espace social** » (Fraser, 2012; Helm et collab., 2007; OWP/P Architects et collab., 2010, cités dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013b, p. 1). Il est important que l'enseignante ou l'enseignant soit conscient de l'espace social dans sa salle de classe.

La connaissance s'acquiert en examinant diverses idées et en discutant de celles-ci avec les autres. Dans *Comprendre le cerveau : naissance d'une science de l'apprentissage* (Organisation de coopération et de développement économiques, 2007), il est précisé que :

> [l]es interactions sociales agissent tel un catalyseur des apprentissages. Sans interaction, un individu ne peut ni apprendre ni même se développer correctement. Face à un contexte social, ses apprentissages seront d'autant plus performants que ce contexte sera riche et varié. (p. 35)

Le travail en équipe favorise les échanges enrichissants ainsi que la communication et le raisonnement des élèves.

Il est important que l'enseignante ou l'enseignant réfléchisse à l'organisation physique de la salle de classe et la planifie, mais également qu'elle ou il s'attarde à la construction d'équipes de travail. Celles-ci peuvent être constituées de manière stratégique ou aléatoire.

Assurer un accès à une variété de ressources liées à l'apprentissage des mathématiques

> Quand les mathématiques sont perçues comme la mathématisation du monde qui nous entoure – l'activité humaine qui organise et décrit la réalité de façon mathématique – plutôt qu'un système de contenus à apprendre et à transmettre, les modèles mathématiques deviennent très importants. C'est impossible de parler de mathématisation sans parler simultanément de modèles. (Fosnot et Dolk, 2001, p. 77, traduction libre, cités dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008b, p. 21)

Dans un environnement propice à l'apprentissage, l'enseignante ou l'enseignant facilite l'accès aux élèves à une variété de ressources. Du matériel de manipulation aux applications technologiques, chaque outil influence la compréhension conceptuelle des élèves.

Que signifie « comprendre un concept »? Selon John A. Van de Walle et LouAnn Lovin (2008, p. 6), « [l]a *connaissance conceptuelle des mathématiques* consiste en **relations logiques** construites de manière interne et présentes dans l'esprit en tant qu'éléments d'un réseau d'idées. » Cette explication permet de définir l'expression *modèle d'un concept mathématique* : le modèle d'un concept mathématique correspond à tout objet, toute image ou tout dessin qui évoque la relation qui lui est associée.

EXEMPLE – COMPRÉHENSION DU SENS DE LA FRACTION COMME PARTIE D'UN TOUT

Il est possible de déterminer que le concept de la fraction $\frac{1}{4}$ (un quart) n'est compris qu'à partir du moment où l'élève peut exprimer clairement la relation entre le tout et la partie. Une ou un élève qui exprime sa compréhension du concept de la fraction $\frac{1}{4}$, comme dans la photo ci-dessous, fait preuve d'une compréhension conceptuelle.

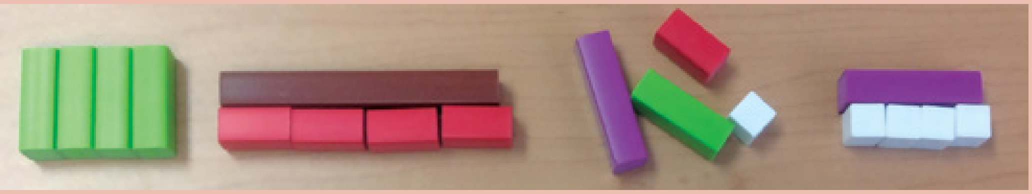


Photo : Hélène Matte.

J'ai représenté un quart à l'aide d'une réglette verte, car les quatre réglettes représentent le tout.	Une réglette rouge représente un quart, car la réglette brune est le tout.	Chaque réglette représente un quart de l'ensemble. Le tout est le nombre d'objets dans le groupe.	Je peux représenter le tout par une réglette d'une couleur et les quarts par des réglettes d'une autre couleur.

Les outils et les modèles

> Les modèles mathématiques permettent de représenter des situations afin de pouvoir étudier les relations entre les nombres et les quantités. Au fil du temps, les mathématiciens et les mathématiciennes ont créé, utilisé et généralisé certaines idées, stratégies et représentations pour faciliter l'appropriation de concepts. À l'usage, certaines représentations sont devenues des modèles reconnus (p. ex., la droite numérique et la disposition rectangulaire). Il est important que les élèves utilisent des modèles différents dans une variété d'activités pour pouvoir passer aisément d'une représentation à une autre (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008b, p. 21).

Puisqu'il est difficile pour les élèves de représenter les relations logiques d'un concept et de les vérifier en n'utilisant que des mots et des symboles, les modèles et les outils mathématiques doivent leur permettre de penser, d'expérimenter, de raisonner et de s'exprimer. Or, selon Van de Walle et Lovin (2008) :

> [l]'erreur la plus courante commise par les enseignantes quant au matériel de manipulation consiste à structurer les leçons de telle sorte que les élèves suivent à la lettre les consignes sur la façon d'utiliser un modèle, généralement dans le but d'obtenir une réponse. (p. 10)

Un excès de consignes risque d'amener les élèves à croire qu'un modèle n'est qu'un outil à donner des réponses, et non un outil pour penser. L'enseignante ou l'enseignant ne peut pas se « […] limiter à fournir aux élèves un ensemble de réglettes colorées ou de jetons bicolores et [s']attendre à ce qu'[elles et] ils comprennent les concepts mathématiques susceptibles d'être représentés par ce matériel » (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 8). Selon Van de Walle et Lovin, lorsqu'on présente aux élèves un nouveau modèle ou une nouvelle utilisation d'un modèle déjà familier, il y a des **règles** simples à suivre. En voici quelques-unes :

1. « Présentez les nouveaux modèles en expliquant comment ils peuvent représenter les idées pour lesquelles ils ont été conçus » (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 9).
2. « Permettez aux élèves (dans la plupart des cas) de choisir librement, parmi les modèles disponibles, celui qu'ils veulent utiliser pour résoudre un problème » (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 9).
3. Spécifiez explicitement les objectifs que vise l'utilisation d'un modèle particulier : les modèles peuvent permettre de présenter le sens du problème, de prédire une solution raisonnable, de déterminer une ou diverses stratégies pour en arriver à la solution, de vérifier une solution et de communiquer son raisonnement.

L'utilisation judicieuse du matériel de manipulation et de la technologie

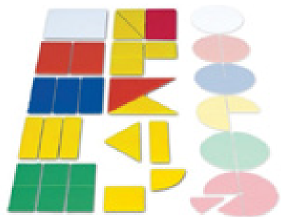
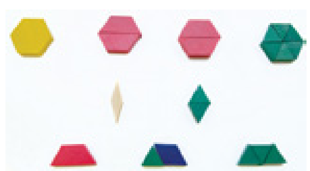
Le matériel de manipulation est utile pour représenter une situation ou résoudre un problème dans plus d'un domaine mathématique; par exemple, des mosaïques géométriques peuvent servir à représenter des fractions, des situations algébriques et des figures géométriques pour le calcul de l'aire.

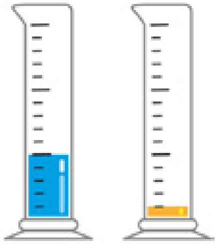
Le concept de fraction, par exemple, peut être modélisé à l'aide de divers types de matériel de manipulation. Chacun d'eux peut être associé à un modèle spécifique de représentation de la fraction, comme les modèles de longueur, de surface, d'ensemble et de volume. Pour développer le concept de fraction, les élèves pourraient explorer les fractions à l'aide de ces différents modèles.

Voici des exemples de matériel de manipulation pouvant être mis à la disposition des élèves au moment de l'exploration du concept de fraction. Selon Van de Walle et Lovin (2008) :

> [i]l est toujours approprié d'inciter les élèves à faire des dessins pour faciliter le raisonnement mathématique. Toutefois, dans le cas de dessins de fractions, le risque est grand pour l'élève de tirer des conclusions erronées en s'appuyant sur des dessins qui manquent de précision. Il est souvent difficile de représenter des parties fractionnaires d'une région, et surtout d'un disque. Il vaut donc mieux parfois exiger l'emploi d'un modèle concret (avec du matériel de manipulation) qui ne soit cependant pas un dessin. (p. 93)

Comme le suggèrent Van de Walle et Lovin, il importe d'expliquer aux élèves la façon dont elles et ils peuvent représenter les relations à explorer.

Modèle de longueur : réglettes Cuisenaire[MC] Un ensemble de réglettes Cuisenaire[MC] comprend 10 bâtonnets de couleur mesurant de 1 cm à 10 cm. Les réglettes permettent de représenter la relation entre le tout et la partie. L'enseignante ou l'enseignant explique aux élèves, par exemple, que le bâtonnet vert lime (3 cm) représente un tiers si le bâtonnet bleu (9 cm) est l'entier ou représente un demi si le bâtonnet vert foncé (6 cm) est l'entier.	 © The Cuisenaire® Company (Educational Solutions (UK) Ltd)
Modèle de surface : ▶ carrés fractionnaires et disques fractionnaires Dans le cas d'un ensemble, les fractions ne sont pas identifiées. Les élèves doivent remarquer, par exemple, que le matériel a été conçu de sorte que le carré blanc représente un entier et que les autres morceaux ne représentent une fraction que lorsqu'ils sont mis en relation avec cet entier.	 Jegro, distribué par www.oppa-montessori.net
▶ mosaïques géométriques Les mosaïques géométriques permettent de représenter la relation qui existe entre les surfaces des polygones qui font partie d'un même ensemble. L'enseignante ou l'enseignant explique aux élèves, par exemple, que le trapèze rouge représente un demi si l'hexagone est l'entier.	

Modèle d'ensemble : jetons bicolores ou cubes Un ensemble permet de représenter une collection d'objets qui ne pourraient pas être facilement représentés à l'aide d'un modèle de longueur ou de surface.	
Modèle de volume : cylindre (exemple) Dans un modèle de volume, une forme tridimensionnelle représente le tout. L'espace de la forme est divisé en parties égales.	 Pour $\frac{1}{3}$ d'eau, ajouter $\frac{1}{15}$ de concentré de jus d'orange.

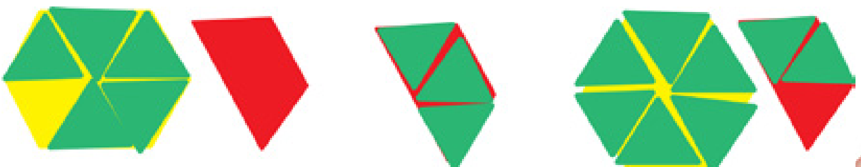
Il est important de permettre aux élèves de choisir librement le modèle qui appuie leur raisonnement. Elles et ils doivent réaliser que certains modèles ou certains types de matériel de manipulation sont plus appropriés pour représenter une situation.

Sophie et Jérémy mangent la même sorte de tablette de chocolat. Sophie a mangé $\frac{5}{6}$ de sa tablette et Jérémy a mangé $\frac{1}{2}$ de la sienne. Quelle quantité de chocolat ont-ils mangée en tout?

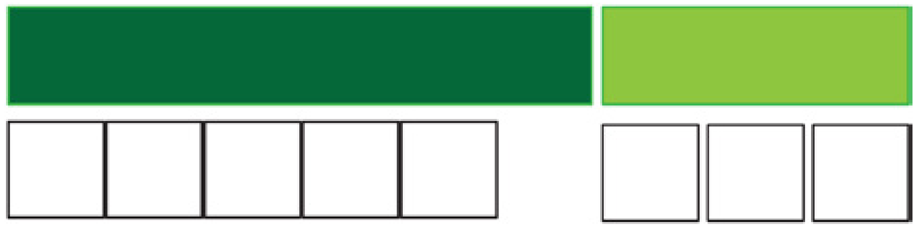
(Adapté de Van de Walle et Lovin, 2008, p. 93.)

Voici des exemples où le choix de modèles particuliers appuie le raisonnement des élèves.

Équipe 1 : Nous avons choisi les mosaïques géométriques, car nous avons remarqué que ce matériel nous permettait de représenter des demis et des sixièmes. Nous avons pu faire une estimation à l'aide du matériel. Nous avons représenté $\frac{5}{6}$ en utilisant cinq triangles verts et un demi en utilisant un trapèze rouge. Cela nous a convaincus que la somme est un peu moins que $1\frac{1}{2}$. Nous voyons que la solution est $1\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{6}$. Si nous remplaçons le trapèze par trois triangles verts, alors la solution est $1\frac{2}{6}$.



Équipe 2 : Nous avons utilisé les réglettes, puisqu'elles permettent de représenter beaucoup de fractions. Nous avons choisi la réglette vert foncé pour représenter la tablette de chocolat entière. Les réglettes blanches représentent des sixièmes de tablette de chocolat. La réglette vert lime représente la moitié de la tablette de chocolat, étant donné qu'elle est équivalente à trois réglettes blanches. La solution est donc huit réglettes blanches, soit $\frac{8}{6}$.



Les modèles utilisés ont contribué à représenter le problème, à prédire une solution vraisemblable, à déterminer une ou diverses stratégies pour en arriver à la solution et à communiquer son raisonnement.

Les outils technologiques, tout comme le matériel de manipulation, sont aussi utiles aux élèves au moment d'analyser des phénomènes plus abstraits. Dans le magazine L'InforMATHeur (Association francophone pour l'enseignement des mathématiques en Ontario, février 2015, p. 4 et 5), Serge Demers mentionne avoir mené une étude pendant deux ans au sujet de l'intégration de la technologie dans les écoles secondaires franco-ontariennes. Ce qu'il a pu démontrer notamment, c'est que la technologie, soit l'utilisation en salle de classe de la calculatrice à affichage graphique et des sondes de mouvement, aide les élèves à mieux comprendre les rôles des paramètres au moment de l'étude des fonctions. Demers (Association francophone pour l'enseignement des mathématiques en Ontario, février 2015, p. 5) précise qu' « [e]n peu de temps, on peut tracer une courbe, en modifier les paramètres, et découvrir les concepts plutôt que les apprendre par cœur. La verbalisation de ces découvertes est ensuite très riche. »

Il existe des outils tels que des logiciels grapheurs qui facilitent le genre d'exploration que propose Demers. À l'aide de ceux-ci, il est possible, par exemple, de tracer une droite d'équation $y = mx + b$, puis de faire varier les paramètres *m* ou *b, ou* bien les deux, dans le cas d'une fonction affine, ou de tracer une parabole d'équation $y = a(x - h)^2 + k$), et de faire varier les paramètres *a*, *h* et *k*, dans le cas d'une fonction du second degré.

Présenter le raisonnement des élèves, qui reflète les concepts et les habiletés enseignés

Dans un environnement propice à l'apprentissage des mathématiques, l'enseignante ou l'enseignant présente le raisonnement des élèves à différents moments de l'apprentissage, soit à l'occasion de l'exploration de concepts ou de l'échange mathématique. L'objectif est :

- d'améliorer la collaboration entre les élèves en vue de créer une communauté d'apprenantes et d'apprenants;
- de permettre aux élèves d'organiser leurs idées et leurs stratégies pour leur bénéfice et celui des autres;
- de donner aux élèves l'occasion d'analyser et de remettre en question leurs idées ou leurs stratégies, de même que celles des autres;
- d'interpréter et d'évaluer les idées des élèves sur le plan du raisonnement mathématique.

La communication mathématique

Serge Demers (Association francophone pour l'enseignement des mathématiques en Ontario, février 2015), explique qu'« [i]l faut voir la communication non comme une finalité en salle de classe, mais plutôt comme un outil important qui permet aux élèves d'échanger à propos des mathématiques » (p. 4). Il précise qu'un pair « […] qui est du même niveau, saisit davantage ce que l'élève comprend ou débat ou questionne. Donc, c'est vraiment gagnant d'apprendre des stratégies de ses pairs parce que ces dernières sont à leur niveau » (p. 4). Il ajoute cependant :

> […] [qu']il faut travailler les règles d'interaction de groupe : « Comment avoir une discussion de groupe? » « Comment est-ce que j'écoute les arguments des autres? » « Comment est-ce que j'accepte ou réfute les arguments des autres? ». Ce sont des habiletés sociales rattachées intimement aux habiletés de communication efficace. (p. 5)

Finalement, il considère que « [c]'est le rôle des enseignants de guider, de modeler et de permettre la pratique de ces habiletés » (p. 5).

L'enseignante ou l'enseignant a comme rôle de développer chez les élèves leurs habiletés de communication mathématique. Ces habiletés ne se limitent pas uniquement à la capacité de prendre la parole; les élèves doivent aussi faire preuve d'écoute active. Pour y arriver, elle ou il pose différents styles de questions aux élèves pendant qu'elles et ils travaillent en équipes ou au moment d'un échange mathématique en groupe-classe. Ces questions ont comme objectif :

- de modeler les habiletés de communication que doivent développer les élèves pour qu'elles et ils soient en mesure de contribuer au bon déroulement d'une discussion dans leur équipe ou en groupe-classe;
- de permettre aux élèves de collaborer au savoir de leur équipe ou du groupe-classe;
- de développer chez les élèves le raisonnement et la pensée critique.

ACTIONS POUR SOUTENIR LA COMMUNICATION MATHÉMATIQUE	
INTENTION	**COMMENT?**
Répéter Promouvoir l'écoute active contribue au bon fonctionnement du groupe-classe et exige des élèves de tenir compte du raisonnement des autres.	Faire redire à une ou à un autre élève ce qu'a dit une ou un élève. **Exemples :** « Quelqu'un peut-il répéter ce que vient de dire Xavier? » « Peux-tu répéter ce que ton coéquipier propose comme stratégie? »
Reformuler Reformuler contribue au savoir du groupe-classe, car l'explication d'une ou d'un élève pourrait être plus claire pour certaines et certains que l'explication d'une ou d'un autre élève, ou que celle de l'enseignante ou de l'enseignant.	Demander aux élèves de reformuler le raisonnement d'une ou d'un autre élève. **Exemples :** « Peux-tu expliquer à ta façon ce que vient de dire Jamal? » « Quelqu'un aurait-il une autre façon d'expliquer ce que vient de dire Émilie? »
Débattre Être en mesure de soutenir son raisonnement, malgré d'autres points de vue, développe la pensée critique chez l'élève.	Demander à une ou à un élève d'analyser le raisonnement d'une ou d'un autre élève ou d'en discuter. **Exemples :** « Es-tu d'accord ou pas avec Maëlys? Pourquoi? » « Est-ce identique ou différent de ce qu'a dit Jack? » « Quel pourrait être un bon argument pour nous convaincre de ton idée? du contraire? »

ACTIONS POUR SOUTENIR LA COMMUNICATION MATHÉMATIQUE	
INTENTION	**COMMENT?**
Ajouter Inviter les élèves à ajouter des éléments aux explications permet à d'autres élèves de contribuer au savoir collectif et augmente les occasions de créer des liens avec leurs connaissances antérieures.	Appuyer les propos des autres en ajoutant une idée. **Exemples :** « Quelqu'un aimerait-il ajouter quelque chose? » « Cela vous fait-il penser à quelque chose que nous avons déjà vue? » « Y a-t-il une autre raison qui permet d'appuyer ce que vient de dire Raphaël? »
Vérifier Valoriser l'élève qui se pose des questions permet de développer sa pensée critique et sa métacognition. De plus, il est probable qu'elle ou il ne soit pas la seule ou le seul à se poser cette question.	Vérifier la compréhension de l'idée qu'exprime une ou un élève. **Exemples :** « Si je comprends bien, tu penses que… » « Je ne suis pas certain de comprendre, car… »

(Adapté de Chapin, O'Connor et Anderson, 2009, p. 13, traduction libre.)

Soutenir le raisonnement mathématique des élèves

Plusieurs stratégies ont comme but de rendre audible le raisonnement des élèves, afin que celui-ci soit entendu par certaines et certains élèves (exploration) ou par l'ensemble du groupe-classe (échange mathématique). Trois actions efficaces pour y parvenir sont d'allouer aux élèves une période d'attente, de mettre en pratique le **Pense-Parle-Partage (PPP)** et d'utiliser le **Visualiser-Verbaliser-Vérifier (VVV)**.

ACTION	COMMENT?
Attendre Avoir recours à une période d'attente montre aux élèves que penser, réfléchir et raisonner, cela nécessite du temps. En planifiant cette période de temps d'attente, l'enseignante ou l'enseignant mise sur le fait que les élèves contribuent au savoir collectif du groupe-classe. Attendre après avoir obtenu une réponse permet aussi aux élèves de clarifier leur pensée. (Adapté de Chapin, O'Connor et Anderson, 2009, p. 13, traduction libre.)	Compter au moins trois secondes (dans sa tête) après avoir posé une question ou après avoir obtenu une réponse.

ACTION	COMMENT?
Pense-Parle-Partage (PPP) Le **Pense-Parle-Partage (PPP)** est un moment permettant aux élèves de raisonner et à l'enseignante ou à l'enseignant d'écouter les conversations mathématiques. (Adapté de Chapin, O'Connor et Anderson, 2009, p. 13, traduction libre.)	Poser aux élèves une question et leur donner le temps d'y penser (l'enseignante ou l'enseignant peut les inciter à écrire leurs idées). Les inviter à en parler à une ou à un partenaire. Puis, animer une discussion en groupe-classe. **Exemples :** « Peux-tu expliquer une idée importante dont tu as discuté avec ta ou ton partenaire? » « Dans quelles équipes y a-t-il eu des discussions parce que les idées émises étaient différentes? »
Visualiser-Verbaliser-Vérifier (VVV) Le **Visualiser-Verbaliser-Vérifier (VVV)** est un moment permettant aux élèves de visualiser et à l'enseignante ou à l'enseignant d'observer et d'écouter les différentes démarches et solutions.	Présenter aux élèves un problème et les inciter à réfléchir à leur compréhension de la situation ou à l'imaginer dans leur tête. Le **Visualiser-Verbaliser-Vérifier (VVV)** est un moment permettant aux élèves de se faire une image mentale de la situation ou du problème. Inviter les élèves à faire part aux autres de leur compréhension et à écouter celle des autres pour modifier leur raisonnement. Demander aux élèves de résoudre le problème pour vérifier si leur démarche ou leur solution est vraisemblable. **Exemples :** « Peux-tu voir cette situation dans ta tête? » « Peux-tu visualiser la démarche à entreprendre? » « Dans quelles équipes y a-t-il eu des discussions parce que les idées ou les stratégies émises étaient différentes? » « En comparant vos solutions ou vos démarches, pouvez-vous déterminer si, au départ, votre visualisation était juste? »

Voici un problème à explorer, inspiré de Kyle Pearce (2014), à l'aide du **Pense-Parle-Partage (PPP)** ou du **Visualiser-Verbaliser-Vérifier (VVV)**.

TAPINTOTEENMINDS, Stacking Paper, https://tapintoteenminds.com/3act-math/stacking-paper/

L'échange mathématique

À la suite de l'exploration de concepts mathématiques, il y a diverses façons d'aborder la présentation du raisonnement des élèves; l'une d'elles est l'échange mathématique. La monographie La communication en classe de mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011b, p. 1 et 2) décrit l'échange mathématique comme une occasion de consolider en grand groupe l'apprentissage en étudiant les différentes stratégies des élèves. Ce n'est pas un moment où chaque solution est expliquée :

> […], car le temps ferait défaut, et chaque élève ne comprend pas nécessairement une stratégie de la même façon que ses camarades. L'échange mathématique privilégie plutôt une approche axée sur la discussion en groupe-classe de deux ou trois solutions stratégiquement choisies afin que les élèves puissent améliorer leurs apprentissages en mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011b, p. 4).

Pour déterminer l'intention de l'échange mathématique, il est essentiel que l'enseignante ou l'enseignant résolve elle-même ou lui-même le problème proposé aux élèves au moment de l'exploration, et ce, avant même de le leur présenter. Cet exercice a deux objectifs : anticiper les différentes façons dont les élèves aborderont le problème et déterminer les grandes idées, les processus mathématiques, les difficultés, les stratégies et les concepts relatifs au problème.

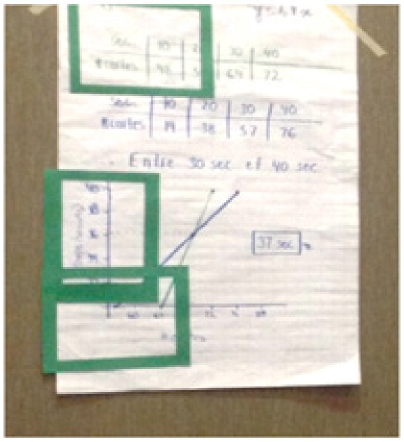
Elle ou il doit aussi déterminer la façon de gérer l'échange mathématique afin de soutenir l'objectivation et la consolidation, c'est-à-dire un moment privilégié pour présenter ou consolider certaines connaissances telles que les conventions mathématiques, les procédures et le vocabulaire mathématique associés aux éléments à l'étude.

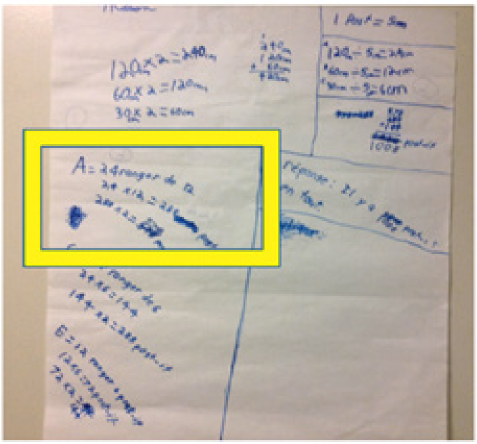
L'enseignante ou l'enseignant ne peut pas planifier entièrement l'échange mathématique, même si elle ou il a prévu efficacement les stratégies que choisiront les élèves pendant l'exploration du problème. Elle ou il doit aussi se poser les questions proposées à la page suivante pendant l'observation et l'écoute du raisonnement des élèves au moment de la résolution du problème.

- Quels sont les éléments mathématiques qui ressortent clairement dans les communications des élèves (à l'oral ou à l'écrit)?
- Quel langage mathématique faut-il utiliser pour exprimer clairement les éléments mathématiques relevés dans les présentations écrites et orales des élèves (p. ex., actions, concepts et stratégies mathématiques)?
- Quelles sont les relations mathématiques qui existent entre les différentes solutions des élèves?

Exemple d'une stratégie pour déterminer les concepts à discuter :

À la suite de ses observations, l'enseignante ou l'enseignant peut cibler plus précisément l'objet de l'échange mathématique en encadrant les éléments auxquels les élèves devraient porter une attention particulière. Cela peut se faire physiquement en utilisant un cadre pour faire ressortir certains éléments ou électroniquement en créant un encadré autour des traces de travail des élèves, photographiées au moment de l'observation. Le questionnement de la part de l'enseignante ou de l'enseignant se limitera alors aux éléments encadrés.





Photos : Hélène Matte.

L'échange mathématique EN ACTION

Un exemple d'échange mathématique portant sur le problème de la nourriture pour chat sera présenté dans les pages suivantes. L'idéal serait que la lectrice ou le lecteur fasse l'exercice de planifier l'échange mathématique afin de prévoir la manière dont les élèves s'y prendront pour résoudre le problème.

Problème de la nourriture pour chat : les chatons ont besoin d’une alimentation spécifique. Dans ta ville, deux boutiques vendent ce type de nourriture pour chat. Les boîtes vendues ont la même capacité et sont de marque identique. Dans quelle boutique auras-tu le meilleur prix? Explique ton travail.

Bob	**12 boîtes pour 15 $**
Maria	**20 boîtes pour 23 $**

(Problème conçu par Jacob et Fosnot, 2007, cités dans Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2011b, p. 4.)

Voici les solutions d’élèves qu’a choisies l’enseignante ou l’enseignant pour l’échange mathématique.

Les élèves utilisent un schéma pour comparer un ensemble commun, soit l’achat de 60 boîtes.	Bob $\boxed{12}$ $\boxed{24}$ $\boxed{36}$ $\boxed{48}$ $\boxed{60}$ 15$ 30$ 45$ 60$ 75$ Maria $\boxed{20}$ $\boxed{40}$ $\boxed{60}$ 23$ 46$ 69$ C’est mieux chez Maria.
Les élèves se servent des divisions pour représenter leur raisonnement. Elles et ils utilisent un raisonnement proportionnel (p. ex., « Si je connais le coût de 20 boîtes, je peux déterminer le coût d’autres quantités. ») Elles et ils semblent vouloir déterminer le prix unitaire sans remarquer qu’elles et ils pourraient aussi comparer l’achat de 4 boîtes.	BOB 12 = 15 $ ÷3 4 = 5,00 $ ÷4 1 = 1,25 $ Une boîte chez Bob coûte 1,25 $. MARIA 20 = 23 $ ÷5 4 = 4,60 $ ÷4 1 = 1,15 $ Une boîte chez Maria coûte 1,15 $ Le meilleur achat est chez Maria.
Les élèves comparent le prix unitaire, c’est-à-dire le prix d’achat d’une boîte.	B = 15 $ ÷ 12 = 1,25 $/boîte M = 23 $ ÷ 20 = 1,15 $/boîte La boutique de Maria offre le meilleur achat.
Les élèves comparent les données avec un ensemble commun qu’elles et ils ont obtenu en multipliant. Il s’agit de l’achat de 60 boîtes.	B: $\frac{12}{60} = \frac{15\,\$}{75\,\$}$ ×5 M: $\frac{20}{60} = \frac{23\,\$}{69\,\$}$ ×3 Bon

(Inspiré de Jacob et Fosnot, 2007, cités dans Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2011b, p. 4.)

À la suite de ses observations, au moment de l'exploration, l'enseignante ou l'enseignant choisit des traces de travail qui feront progresser les élèves dans leur apprentissage. Au moment de l'échange mathématique, il ne suffit pas de simplement leur demander d'expliquer leur démarche, il faut leur poser des questions stratégiques qui s'articulent autour :

- d'une grande idée;
- des attentes ou des contenus d'apprentissage du programme-cadre et du développement des compétences de la grille d'évaluation du rendement;
- des processus mathématiques tels qu'ils sont décrits dans les programmes-cadres de mathématiques de l'Ontario.

Le problème portant sur la nourriture pour chat qu'a choisie l'enseignante ou l'enseignant fait appel au raisonnement proportionnel. Celui-ci peut être décrit « […] comme la capacité à réfléchir à des relations multiplicatives entre des quantités et à comparer de telles relations, représentées symboliquement sous forme de rapports » (Van de Walle, 2008, p. 163, cité dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2012, p. 3).

Dans le cas présent, en multipliant le prix et le nombre de boîtes obtenues pour ce prix par un nombre identique, l'élève obtient une équivalence de prix lui permettant de comparer des quantités identiques (60 boîtes). En divisant le prix et le nombre de boîtes obtenues pour ce prix par un nombre identique, l'élève obtient une équivalence qui lui permet de comparer des prix unitaires (1,25 $ versus 1,15 $).

Note : Les couleurs utilisées dans la colonne des réponses possibles que donnent les élèves font référence aux couleurs des solutions des différentes équipes, montrées à la page 85.

GRANDE IDÉE : RAISONNEMENT PROPORTIONNEL

Attentes :

- Résoudre des problèmes portant sur les concepts de rapport et de taux. (7e et 8e année)
- Résoudre des problèmes par le biais de la modélisation. (9e année, MFM1P)

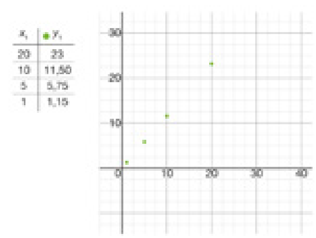
Contenus d'apprentissage :

- Établir des liens entre la multiplication, la division, le raisonnement proportionnel et les concepts de rapport et de taux. (7e année)
- Utiliser des rapports et des taux dans des situations réelles. (7e année)
- Déterminer le taux unitaire dans des situations réelles d'apprentissage. (8e année)
- Utiliser des rapports, des pourcentages et des proportions dans différentes situations. (9e année, MFM1P)

QUESTION QUE POSE L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT PENDANT L'ÉCHANGE MATHÉMATIQUE	RÉPONSES POSSIBLES QUE DONNENT LES ÉQUIPES	CONSOLIDATION QUE FAIT L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT (Les objectifs peuvent être divers : clarifier le vocabulaire, les stratégies et la communication, et faire des liens avec des apprentissages précédents.)
Détermine avec une ou un autre élève les opérations mathématiques qu'a utilisées chacune des équipes.	Des équipes ont multiplié, d'autres ont divisé.	
Les équipes qui **ont multiplié** peuvent-elles expliquer leur raisonnement?	Nous avons dessiné des caisses contenant des boîtes. Cela nous a aidé à voir que, si nous achetons 5 caisses à la boutique de Bob et 3 caisses à la boutique de Maria, alors nous achetons la même quantité de boîtes. C'était plus facile de choisir le meilleur achat de cette façon. Nous avons commencé par additionner, mais nous savons maintenant que nous aurions pu multiplier.	Les verts et les bleus ont utilisé un raisonnement semblable. Ces deux équipes voulaient comparer des ensembles identiques (60). C'est dans la façon qu'elles ont choisi de communiquer leur raisonnement qu'il y a la plus grande différence. Les équipes ont utilisé le raisonnement suivant : si 12 boîtes coûtent 15 $, alors il est possible de déterminer d'autres coûts; par exemple, le coût de 24 boîtes (12 × 2) est de 30 $ (15 × 2) à la boutique de Bob, et ainsi de suite.
	Nous savions déjà que 12 et 20 avaient des multiples communs, donc nous avons multiplié par 5 et par 3. Nous avons représenté notre raisonnement en nous servant de rapports équivalents. Ainsi, nous pouvons donc comparer le coût de 60 boîtes.	Ce raisonnement est très utile en mathématiques et s'appelle *raisonnement proportionnel*. Il est juste de s'en servir pour ce problème-ci, car connaître le prix de 12 boîtes, par exemple, permet de calculer le prix d'autres quantités. Pour quelle autre quantité est-il facile de déterminer le prix? Pour quelle quantité est-il plus difficile de calculer le prix?

<table>
<tr>
<th>QUESTION QUE POSE L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT PENDANT L'ÉCHANGE MATHÉMATIQUE</th>
<th>RÉPONSES POSSIBLES QUE DONNENT LES ÉQUIPES</th>
<th>CONSOLIDATION QUE FAIT L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT
(Les objectifs peuvent être divers : clarifier le vocabulaire, les stratégies et la communication, et faire des liens avec des apprentissages précédents.)</th>
</tr>
<tr>
<td>Les équipes qui ont divisé peuvent-elles expliquer leur raisonnement?</td>
<td>Pour la boutique de Bob, nous avons divisé plusieurs fois pour obtenir le prix d'une boîte. En divisant 12 boîtes et 15 $ par 3, nous avons obtenu 4 boîtes et 5 $. En divisant ensuite ces quantités par 4, nous avons obtenu le prix d'une boîte, soit 1,25 $. Nous avons fait la même chose pour la boutique de Maria.

Nous savions qu'il fallait diviser 15 par 12, car nous voulions le prix d'une boîte de la boutique de Bob. Pour connaître le prix d'une boîte de la boutique de Maria, il fallait diviser 23 par 20.</td>
<td>La division permet aussi de comparer des quantités communes. La quantité ici n'est pas 60 boîtes, comme pour les bleus et les verts, mais plutôt 1 boîte; cette quantité aurait pu aussi être 4 boîtes.
Le prix d'un article se nomme prix unitaire. Les calculs des deux équipes pourraient être représentés sous forme de tableaux.
Les rouges ont divisé plusieurs fois; les noirs n'ont fait qu'une division. Comme les bleus et les verts, les équipes ont utilisé un raisonnement proportionnel, car il existe une relation multiplicative entre les quantités. Il est possible d'observer la relation multiplicative dans les solutions en inversant la direction des flèches.</td>
</tr>
<tr>
<td>De quels modèles les équipes se sont-elles servies?</td>
<td>▶ d'un schéma
▶ d'une phrase mathématique</td>
<td>Les divisions successives de l'équipe des rouges leur ont permis de trouver une quantité commune, soit le prix de 4 boîtes, en plus d'obtenir le prix unitaire. Cela pourrait être présenté sous la forme d'un tableau.
<table>
<tr><th colspan="2">Bob</th></tr>
<tr><td>12</td><td>15</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1,25</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">Maria</th></tr>
<tr><td>20</td><td>23</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4,60</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1,15</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

QUESTION QUE POSE L’ENSEIGNANTE OU L’ENSEIGNANT PENDANT L’ÉCHANGE MATHÉMATIQUE	RÉPONSES POSSIBLES QUE DONNENT LES ÉQUIPES	CONSOLIDATION QUE FAIT L’ENSEIGNANTE OU L’ENSEIGNANT (Les objectifs peuvent être divers : clarifier le vocabulaire, les stratégies et la communication, et faire des liens avec des apprentissages précédents.)
Quels sont les avantages et les désavantages de ces modèles?	Si une personne ne comprend pas le problème, je crois que la phrase mathématique est plus difficile à déterminer, mais c’est ce qui est le plus court à écrire. Le schéma aide à donner un sens à l’énoncé. Nous n’avions pas pensé à faire un tableau en utilisant les traces de notre travail. Nous voyons bien maintenant qu’elles représentaient essentiellement cela. (Équipe des rouges)	Examinons les données pour la boutique de Maria dans un logiciel grapheur destiné aux mathématiques. Quelles différences ou ressemblances y aurait-il dans la représentation graphique si les valeurs de la boutique de Bob y étaient ajoutées?
Y a-t-il d’autres modèles qui n’ont pas été utilisés?	Souvent, lorsque nous avons un tableau, nous pouvons faire une représentation graphique, mais nous ne pensions pas que nous aurions pu faire cela dans ce cas-ci. (Équipe des verts)	 Les deux situations passent par l’origine. Il s’agit donc de situations de proportionnalité, puisque les variations sont directes.

(Inspiré de Jacob et Fosnot, 2007, cités dans Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2011b, p. 4.)

L’échange mathématique est un temps crucial pour permettre à chaque élève d’objectiver sa démarche et les stratégies utilisées. Chacune ou chacun peut analyser et discerner les similitudes et les différences dans les raisonnements mathématiques des autres élèves. Cette réflexion leur permet de comparer leur propre compréhension avec celle d’autres personnes et de faire le point sur leurs propres apprentissages.

L'enseignante ou l'enseignant finalise l'échange mathématique par un temps de consolidation en s'assurant que chaque élève connaît l'objectif de la leçon. Cette consolidation permet aussi à l'enseignante ou à l'enseignant d'adapter son enseignement en fonction du niveau de compréhension des élèves.