B. L'ENSEIGNEMENT EFFICACE DES MATHÉMATIQUES S'APPUIE SUR LES CONNAISSANCES ET LA COMPRÉHENSION ANTÉRIEURES DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES ET EST PERTINENT À LEUR VÉCU

Les programmes-cadres de mathématiques de l'Ontario précisent qu'il faut favoriser un enseignement qui intègre de façon équilibrée les attentes et les contenus d'apprentissage des différents domaines. Pour ce faire, il est pertinent de regrouper les attentes et les contenus d'apprentissage autour d'une grande idée et de mettre en pratique des stratégies d'enseignement efficaces telles que celles liées à la résolution de problèmes. Les connaissances regroupées, ou les grandes idées, aident les élèves à établir plus facilement des liens entre les différents domaines. Elles leur permettent surtout de créer des liens, d'une année d'études à l'autre, entre les concepts clés tout en s'appuyant sur leurs connaissances antérieures et leur compréhension.

L'enseignement selon les grandes idées

L'enseignement efficace des mathématiques offre aux élèves des occasions d'explorer et d'approfondir les grandes idées en mathématiques. Qu'entend-on par *grande idée?* « Une grande idée, c'est l'énoncé d'une idée qui se situe au cœur de l'apprentissage des mathématiques en ce sens qu'elle relie de nombreux concepts mathématiques en un tout cohérent » (Charles, 2005, p. 10, traduction libre).

Aborder les grandes idées avec les élèves permet d'éviter de leur présenter séparément chaque contenu du programme-cadre. Elles et ils apprennent mieux lorsque des liens sont explicitement faits entre les nouvelles connaissances et leurs connaissances antérieures (Borko et Putman, 1995; Schifter, Bastable et Russell, 1997; Kennedy, 1997, cités dans Small, 2008, traduction libre). Les grandes idées aident les enseignantes et enseignants ainsi que les élèves à faire ces liens et par le fait même à approfondir leur compréhension des mathématiques (Small, 2008, traduction libre).

Selon Marian Small (2008, traduction libre), il importe que la grande idée soit présentée explicitement. Que ce soit pendant l'activité d'apprentissage, en posant des questions, ou au cours de la consolidation, la grande idée doit souvent être mise en valeur. Plus les élèves l'entendent, plus il y a de fortes chances qu'elles et ils l'assimilent ou la réutilisent dans leurs apprentissages subséquents. La répétition de celle-ci les aide à activer leurs connaissances antérieures et, en plus, favorise le développement du processus d'établissement de liens. Il est donc crucial d'avoir en tête les grandes idées au moment de la planification à long terme, de la planification à rebours des unités ou des situations d’apprentissage ainsi que pendant l’échange mathématique. Les grandes idées transcendent les différents domaines d’étude du programme-cadre et appuient la notion que l’apprentissage se fait en grande partie grâce aux connaissances antérieures et à la compréhension des élèves.

Voici quelques exemples de grandes idées dans les domaines Numération et sens du nombre, de la 4^{e} à la 8^{e} année, et Numération et algèbre, en 9^{e} et en 10^{e} année.

Grande idée 1

Il existe un nombre infini de possibilités de représenter de façon équivalente la relation entre des nombres. Chacune d’elles peut donner un aperçu des différents aspects de la relation.

(Adapté de Small, 2011, p. 26 à 31 et p. 17 à 20, traduction libre.)

Situation présentée aux élèves :

Jean achète des viandes froides en vue de faire des sandwichs pour le pique-nique qu’organise l’école. Chaque kilogramme de viandes froides coûte 12 $ et permet de préparer 10 sandwichs. Quel sera le coût des viandes froides pour faire 25 sandwichs?

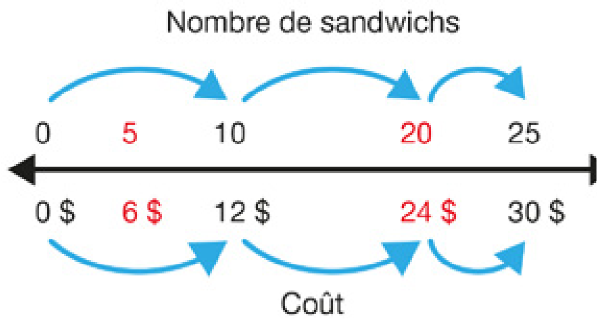
De la 4^{e} à la 6^{e} année

Au cycle moyen, les élèves se servent du matériel de manipulation et de divers modèles, comme les illustrations, les droites numériques et les tables de valeurs, pour reconnaître des relations proportionnelles et les décrire. Elles et ils utilisent intuitivement le raisonnement proportionnel.

Solutions possibles :

a) À l’aide d’une illustration.

b) À l'aide d'une droite numérique ouverte double.



La droite numérique ouverte double met en évidence des rapports qui permettent de résoudre des problèmes.

- Les élèves qui choisissent ce type de représentation graphique peuvent situer sur la droite numérique la moitié des quantités données, soit 5 sandwichs à 6 $, puis déterminer que 25 sandwichs correspondent à 30 $.
- Les élèves qui choisissent ce type de représentation graphique peuvent situer sur la droite numérique le double des quantités données, soit 20 sandwichs à 24 $, puis déterminer que 25 sandwichs correspondent à 30 $.

c) À l'aide d'une table de valeurs ou d'un tableau en T.

÷ 2 × 5

Nombre de sandwichs	10	5	25
Coût ($)	12	6	30

÷ 2 × 5

Nombre de sandwichs	Coût ($)
5	10
10	12
25	30

L'utilisation d'une table de valeurs, dans un problème portant sur la proportionnalité, n'est pas nécessairement enseignée, mais plutôt choisie par les élèves pour qui cette représentation est familière.

De la 7e à la 9e année

Les expériences informelles réalisées au cycle moyen servent à l'étude plus approfondie des rapports, des taux, des pourcentages et de l'algèbre au cours des années d'études ultérieures.

Solutions possibles :

a) À l'aide d'une représentation symbolique (proportion).

$$\frac{10}{12} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{5}{6} \overset{\times 5}{\underset{\times 5}{=}} \frac{25}{30}$$

Solution à l'aide de **taux équivalents**.

$$\frac{10}{12} \overset{\div 10}{\underset{\div 10}{=}} \frac{1}{1,2} \overset{\times 25}{\underset{\times 25}{=}} \frac{25}{30}$$

Solution à l'aide d'un **taux unitaire**.

b) À l'aide d'une table de valeurs.

× 10 × 5

Nombre de sandwichs, *n*	0	1	5	10	25
Coût, *C* ($)	0	1,2	6	12	30

$\times \frac{6}{5}$

× 10 × 5

Les élèves qui utilisent une valeur numérique (coefficient de proportionnalité) pour déterminer la valeur de la seconde variable qui correspond à celle de la première variable, ont un raisonnement proportionnel.

c) À l'aide d'une équation.

Soit n, le nombre de sandwichs, et C, le coût d'un sandwich, en dollars.

$C = 1,2n$

Quel sera le coût si $n = 25$?

$C = 1,2(25)$

$C = 30$

Le coût des viandes froides pour faire 25 sandwichs est de 30 $.

Grande idée 2

Les règles qui régissent les relations entre les nombres et les opérations effectuées sur les nombres s'appliquent à l'algèbre.

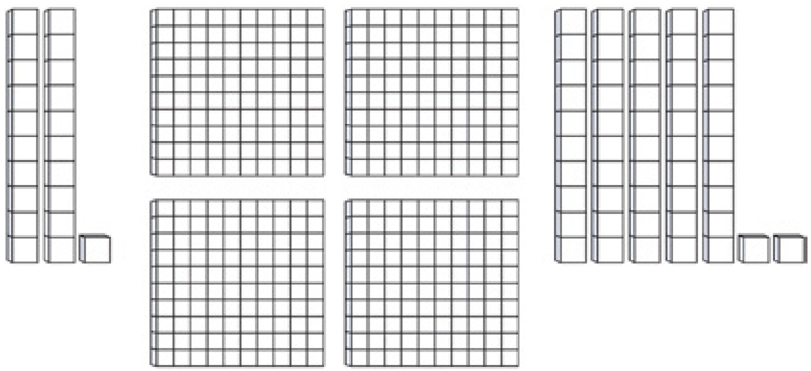
(Adapté de Small, 2011, p. 26 à 31 et p. 17 à 20, traduction libre.)

L'enseignante ou l'enseignant devrait faciliter l'établissement de liens entre les représentations utilisées en numération et celles dont peuvent se servir les élèves en algèbre. Les diverses représentations liées à la numération facilitent la compréhension des opérations algébriques.

De la 4e à la 6e année

À l'aide du matériel de base dix : additionner ou simplifier.

21 + 400 + 50 + 2



= 70 + 400 + 3

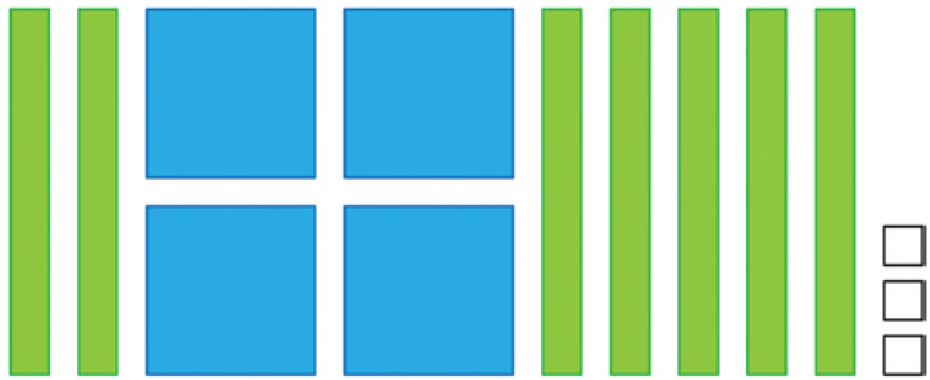
= 473

De la 7e à la 9e année

À l'aide de carreaux algébriques : additionner ou simplifier une expression algébrique.

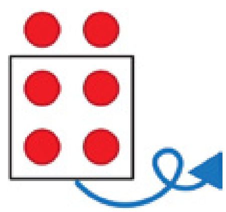
Note : Les carreaux algébriques permettent de représenter des expressions algébriques. C'est en se basant sur le concept d'aire que ce matériel a été conçu. Dans les exemples ci-dessous, le carreau blanc représente 1 (son aire est égale à $1 \times 1 = 1$ cm^2), le carreau vert représente x (son aire est égale à $1 \times x = x$) et le carreau bleu représente x^2 (son aire est égale à $x \times x = x^2$). Les carreaux rouges représentent -1, $-x$ et $-x^2$. À l'aide de ce matériel, les élèves peuvent représenter des monômes, des binômes et des trinômes.

$2x + 4x^2 + 5x + 3$ peut aussi s'écrire $4x^2 + 7x + 3$.



À l'aide de jetons bicolores : soustraire (contexte de retrait).

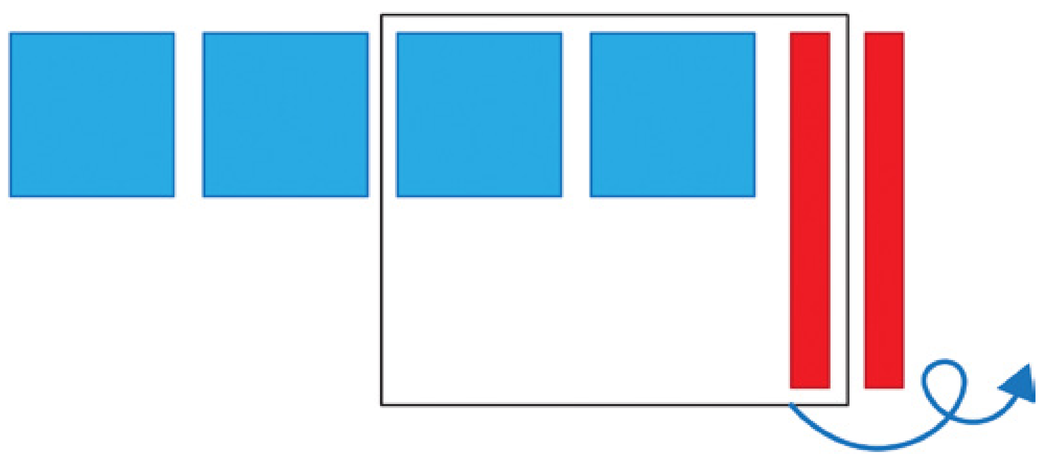
$-6 - (-4) = -2$



En 9e et en 10e année

À l'aide de carreaux algébriques : soustraire (contexte de retrait).

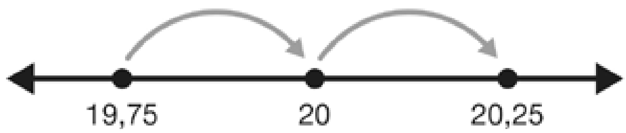
$(4x^2 - 2x) - (2x^2 - x) = 2x^2 - x$



En 7^e et en 8^e année

À l'aide d'une droite numérique ouverte : soustraire (stratégie : additionner pour soustraire).

J'avais une somme de 20,25 $. J'ai dépensé 19,75 $.
Combien d'argent me reste-t-il?
20,25 – 19,75



19,75 + 0,25 + 0,25

0,50 $
Il me reste 0,50 $.

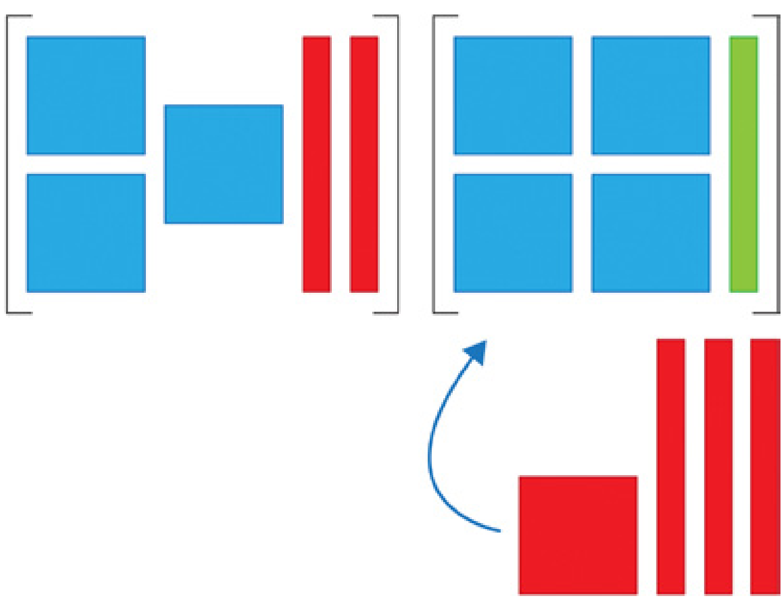
Se demander la quantité à ajouter à 19,75 pour obtenir 20,25 est plus efficace que tenter de soustraire 19,75 de 20,25.

Note : Il est possible de comparer 20,25 avec 19,75. Alors, il faut tenir compte de l'écart entre les deux termes. *Déterminer la différence* signifie « Combien dois-je ajouter au second terme pour obtenir le premier terme? »

En 9^e et en 10^e année

À l'aide de carreaux algébriques : soustraire (stratégie : additionner pour soustraire).

$(3x^2 - 2x) - (4x^2 + x) = -x^2 + -3x$



Il faut tenir compte de l'écart entre $(4x^2 + x)$ et $3x^2 - 2x$.

Déterminer la différence signifie « Combien dois-je ajouter au second binôme pour obtenir le premier binôme? » J'ajoute un carré rouge ($-x^2$) et trois bâtonnets rouges ($-3x$).

De la 4^e à la 6^e année

À l'aide d'une disposition rectangulaire : multiplier (stratégie : décomposer).

L'utilisation d'une disposition rectangulaire illustre la propriété de distributivité de la multiplication.

	30	2
20	600	40
8	240	16

840 + 56

896

$$\begin{aligned} 28 \times 32 &= (20 \times 30) + (20 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2) \\ &= 600 + 40 + 240 + 16 \\ &= 896 \end{aligned}$$

En 10^e année

À l'aide d'une disposition rectangulaire : multiplier (stratégie : décomposer).

La multiplication de monômes disposés en rangs et en colonnes facilite la compréhension de la multiplication de binômes.

$$\begin{aligned} (x + 5) \times (x + 2) &= x^2 + 2x + 5x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10 \end{aligned}$$

	x	2
x	x^2	$2x$
5	$5x$	10

En 8^e année

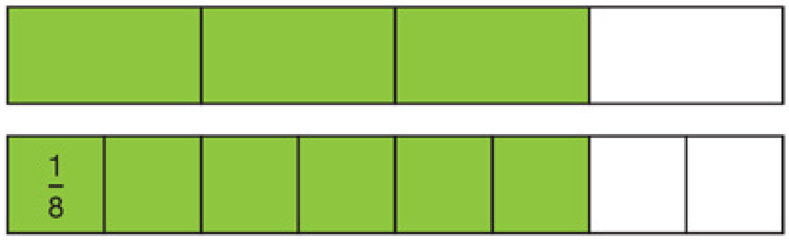
À l'aide d'un modèle de surface : diviser (stratégies : comparer et retrait).

Note : Au besoin, consulter l'**Annexe 1 – Fractions équivalentes**.

Chaque personne recevra $\frac{1}{8}$ d'une barre de céréales. Combien de personnes recevront une part de la barre de céréales s'il n'en reste que $\frac{3}{4}$?

Combien de $\frac{1}{8}$ y a-t-il dans $\frac{3}{4}$? Il y en a 6.

Il y a donc 6 personnes qui recevront une part de la barre de céréales.



$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$$

En 10e année

À l'aide de carreaux algébriques : diviser (stratégies : comparer et retrait).
$(6x + 12) \div (2x + 4) = ?$
Combien de $(2x + 4)$ y a-t-il dans $6x + 12$? Il y en a 3.

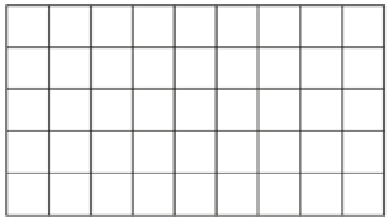
$6x + 12$ est réparti en
3 ensembles de $2x + 4$

Grande idée 3
Établir diverses relations en mesure facilite la formulation de conjectures et de généralisations.

De la 4e à la 8e année

Aire de diverses figures

Pour déterminer l'aire de diverses figures, les élèves doivent comprendre le concept fondamental suivant, soit la « structure associée aux unités de mesure » de l'aire. Elles et ils s'aperçoivent que « les unités de mesure [d'une figure] doivent être juxtaposées dans un espace à deux dimensions, sans espace ni chevauchement, de façon à recouvrir [la figure] selon une disposition rectangulaire constituée de colonnes et de rangées » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 56). Alors, la formule $b \times h$ prend un sens pour elles et eux.

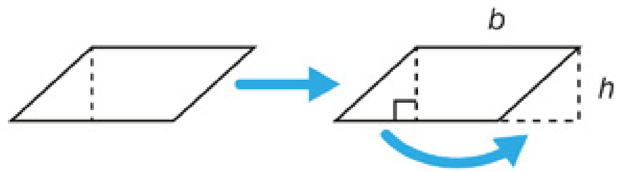


« Le rectangle est composé d'unités carrées disposées en 9 colonnes de 5 rangées chacune. L'aire du rectangle est donc égale à 45 unités carrées » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 56).

(Illustration et texte tirés de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 56.)

PARALLÉLOGRAMME

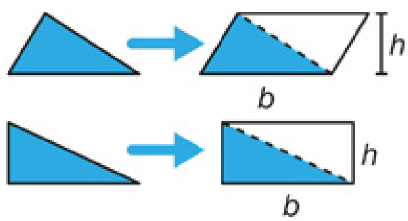
Il est possible de transformer un parallélogramme en rectangle, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire d'un parallélogramme.



$$A = b \times h$$

TRIANGLE

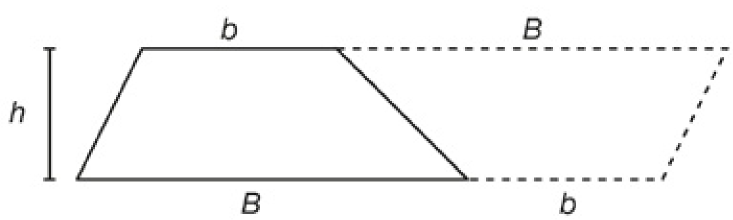
Il est possible de construire un parallélogramme ou un rectangle en utilisant deux triangles identiques, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire d'un triangle.



$$A = \frac{b \times h}{2}$$

TRAPÈZE

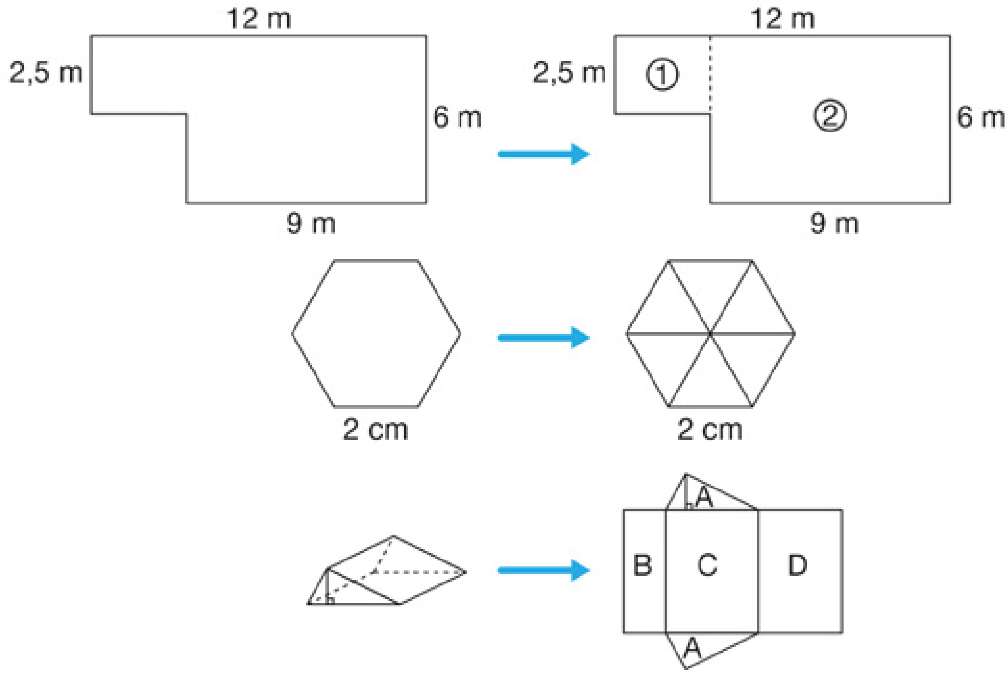
Il est possible de construire un parallélogramme en partant de deux trapèzes identiques, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire d'un trapèze.



$$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$$

Aire de figures complexes et de solides

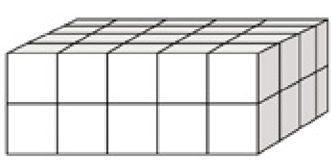
Les figures complexes et les solides sont construits en partant de figures simples, cela aide à comprendre la façon de déterminer leur aire.



(Les figures mathématiques ci-dessus sont adaptées de Conseil des écoles catholiques du Centre-Est (CECCE) (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*.)

Volume de divers solides

Pour déterminer le volume de divers solides, les élèves doivent comprendre le concept fondamental suivant, soit « la structure associée aux unités de mesure » du volume. Elles et ils s'aperçoivent que « les unités de mesure doivent être placées, sans espace ni chevauchement, de façon à former des dispositions rectangulaires d'unités cubiques. Ces dispositions rectangulaires sont ensuite juxtaposées en une troisième dimension pour créer un prisme de même volume que le prisme donné » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 57). Alors, la formule $A_b \times h$ prend un sens pour elles et eux.

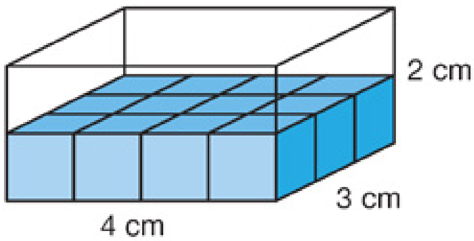


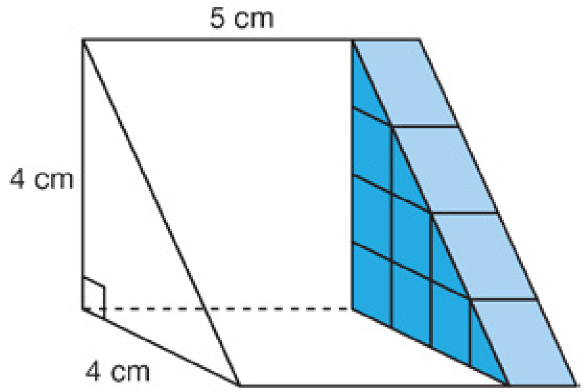
« Le prisme est composé de 2 dispositions rectangulaires. Chacune est composée de 20 unités cubiques disposées en 5 colonnes de 4 rangées chacune. Le volume du prisme est donc égal à 40 unités cubiques » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 57).

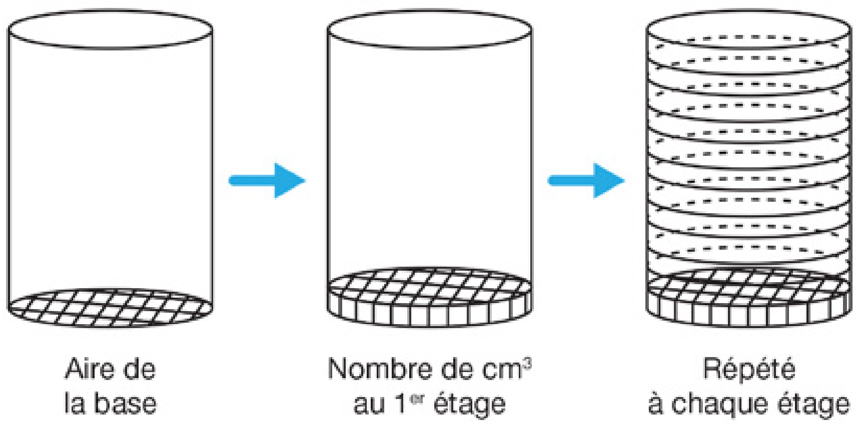
(Illustrations et texte tirés de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 57.)

PRISMES DROITS ET CYLINDRE

Il est possible de construire tous les prismes droits et le cylindre en partant d'une base qui est répétée, cela aide à comprendre la façon de déterminer le volume de prismes droits et du cylindre.







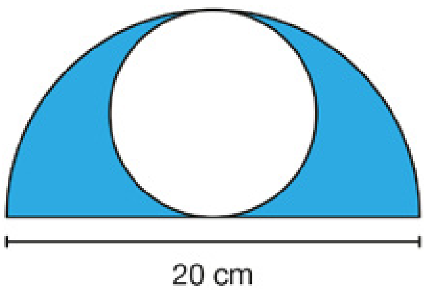
volume = aire de la base × hauteur

En 9e année

Aire de diverses figures complexes et de certains solides

En 9e année, les élèves continuent d'explorer diverses figures complexes et certains solides en vue de consolider leurs apprentissages quant aux relations qui existent entre ces figures et ces solides. Les deux premiers exemples peuvent être utilisés en 8e année, car les figures qui les composent sont vues avant la 9e année.

Il est important que l'élève se rende compte qu'il est possible de décomposer une figure complexe en figures simples pour l'aider à comprendre la façon de déterminer l'aire d'une figure complexe. Elle ou il s'aperçoit que l'aire totale du solide est égale à la somme des aires de chacune des faces du solide.

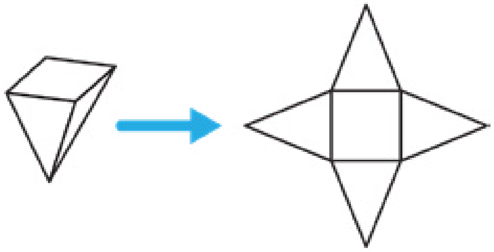


La figure ci-contre est composée d'un cercle et d'un demi-cercle.

SOLIDES

Pyramide à base carrée

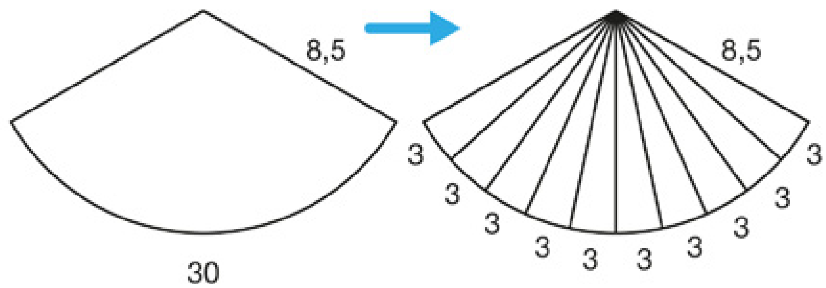
Il est possible de construire le développement d'un solide à l'aide de figures simples, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire d'un solide.



Développer une compréhension de l'enseignement efficace des mathématiques

Cône (aire latérale)

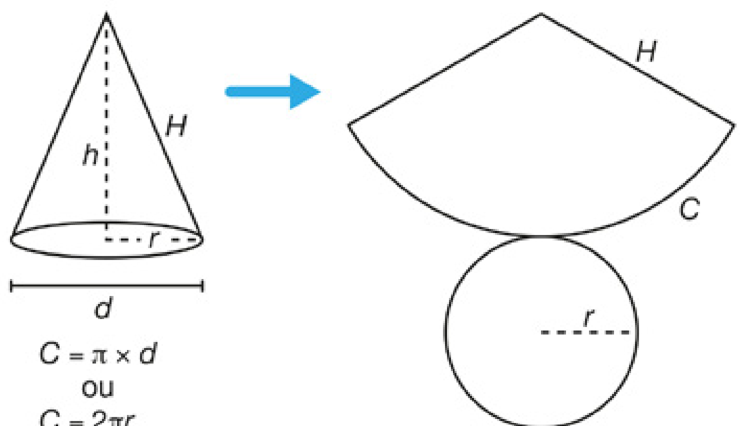
Il est possible de construire un cône en partant de plusieurs triangles, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire latérale d'un cône.



$$A = 10 \times \frac{3 \times 8{,}5}{2}$$

Cône (aire totale)

Il est possible de construire un cône en partant de deux figures simples, cela aide à comprendre la façon de déterminer l'aire totale d'un cône.



$C = \pi \times d$

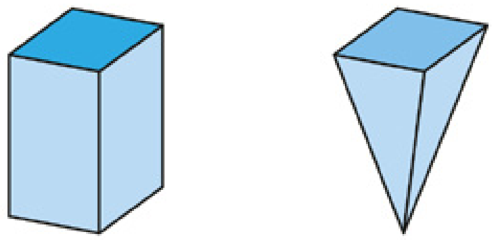
ou

$C = 2\pi r$

$$A = \frac{C \times H}{2} + \pi r^2$$

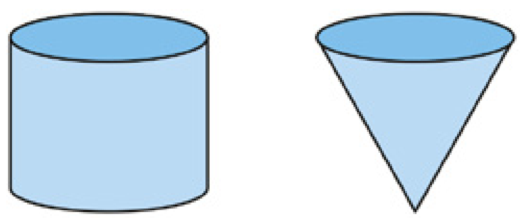
Relation entre le volume de solides

Il est possible de construire un prisme à base carrée en sachant que la capacité de trois pyramides à base carrée, dont la hauteur et l'aire de la base correspondent à celles du prisme, peut être contenue dans le prisme, ce qui aide à en déterminer le volume.



$V = A_{base} \times h$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} A_{base} \times h$

Il est possible de construire un cylindre en sachant que la capacité de trois cônes, dont la hauteur et l'aire de la base correspondent à celles du cylindre, peut être contenue dans le cylindre, ce qui aide à en déterminer le volume.



$V = A_{base} \times h$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} A_{base} \times h$

(Les figures mathématiques ci-dessus sont adaptées de Conseil des écoles catholiques du Centre-Est (CECCE) (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*.)