A. L'ENSEIGNEMENT EFFICACE DES MATHÉMATIQUES EST FONDÉ SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ET L'EXPLORATION DE CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Le Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, fascicule 2, 2006b) justifie le besoin d'améliorer la capacité des élèves à résoudre des problèmes comme suit :

> Une société axée sur les nouvelles technologies de l'information et de la communication a besoin d'individus capables de réfléchir de façon éclairée à des questions complexes, des individus capables de « penser logiquement à de nouvelles situations et de les analyser, de trouver de nouvelles façons de résoudre des problèmes et de communiquer leurs solutions de façon claire et convaincante » (Baroody et Coslick, 1998, p. 2-1, traduction libre). Afin de préparer les élèves à fonctionner dans une telle société, l'enseignant ou l'enseignante doit promouvoir l'acquisition de processus et de stratégies de résolution de problèmes, de même qu'une attitude positive à l'égard des mathématiques. (p. 3)

Encore aujourd'hui, le personnel enseignant veut aider les élèves à développer ces mêmes connaissances et habiletés intellectuelles, car elles sont essentielles à une participation active et significative à la société du XXIe siècle. Néanmoins, dans la citation ci-dessus, il est spécifié que, pour atteindre l'objectif mentionné, le personnel enseignant doit « promouvoir l'acquisition de processus et de stratégies de résolution de problèmes ».

- Qu'entend-on exactement par « résolution de problèmes » et comment cette approche pourrait-elle contribuer à l'apprentissage des mathématiques?
- Quelles sont les étapes essentielles à la mise en œuvre de l'enseignement PAR la résolution de problèmes comme moyen efficace d'enseigner les mathématiques?
- Quel est le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant dans une salle de classe où l'enseignement PAR la résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage?

> Dans un climat d'enseignement efficace, on poursuit simultanément l'enseignement PAR et POUR la résolution de problèmes. Dans l'enseignement PAR la résolution de problèmes, l'un des principaux

> buts est d'explorer, de développer et de démontrer la compréhension d'un concept mathématique. Dans l'enseignement POUR la résolution de problèmes, le but premier est de guider les élèves à travers les étapes du processus et des stratégies de résolution de problèmes (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, fascicule 2, 2006b, p. 7).

L'enseignement efficace des mathématiques PAR la résolution de problèmes

Développer une compréhension de l'enseignement efficace des mathématiques consiste à comprendre l'importance de la résolution de problèmes dans l'appropriation des concepts mathématiques et des procédures mathématiques. Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est de planifier des situations d'apprentissage dans des contextes engageants où le questionnement et l'échange mathématique ont pour but le développement de compétences en mathématiques. La définition concernant la résolution de problèmes proposée dans le document *Recueil des pratiques réussies en mathématiques, de la 6e à la 9e année* (Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, 2002) cerne l'essentiel de ce qu'est une résolution de problèmes :

> Une résolution de problèmes, c'est une situation qui demande de répondre à une question ou d'accomplir une tâche sans que les moyens à utiliser soient connus. Elle doit provoquer un état de déséquilibre de sorte que l'élève ait à fournir un effort intellectuel pour le résoudre. Un problème qui n'incite pas l'élève à réfléchir n'est pas jugé pertinent; c'est tout au plus l'application d'une procédure ou d'une technique. (p. 17)

Dans le document Le curriculum de l'Ontario, de la 1re à la 8e année – Mathématiques (révisé) (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a), il est précisé que :

> [d]ès les premiers apprentissages, les mathématiques doivent être perçues et vécues par les élèves comme des occasions de résoudre des problèmes. […] En mathématiques, l'importance de la résolution de problèmes ne devrait plus faire l'objet de débat, puisque ce processus joue un rôle central dans l'apprentissage. (p. 17 et 18)

De plus, dans Le curriculum de l'Ontario, 9e et 10e année – Mathématiques (révisé) (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b), il est mentionné que :

> [l]'apprentissage de nouveaux concepts doit être intégré à un contexte précis. Un contexte d'apprentissage pertinent doit être suffisamment vaste pour permettre aux élèves d'explorer et de développer une compréhension initiale, de reconnaître quelles sont les compétences appropriées, de les acquérir et de les utiliser dans des applications mettant en valeur une nouvelle connaissance. (p. 22)

Le choix d'un contexte approprié est la clé de l'engagement de l'élève. Plus il est lié à l'expérience de vie de l'élève, plus cette dernière ou ce dernier en voit la pertinence. Le contexte permet à l'élève d'établir des liens avec ses connaissances antérieures et de saisir les concepts visés en formulant des hypothèses et en les vérifiant, ainsi qu'en justifiant son raisonnement. Il doit favoriser chez l'élève l'utilisation et le développement de processus tels que la sélection d'outils appropriés et de stratégies de calcul, l'établissement de liens, le raisonnement, la réflexion sur le travail effectué et la modélisation d'une situation. Tous ces processus sont essentiels à la résolution de problèmes.

Le processus de résolution de problèmes est indissociable du processus de communication, car, ensemble, ils constituent le moteur permettant à l'élève de développer tous les processus mathématiques de façon à favoriser sa compréhension conceptuelle et sa compréhension procédurale.

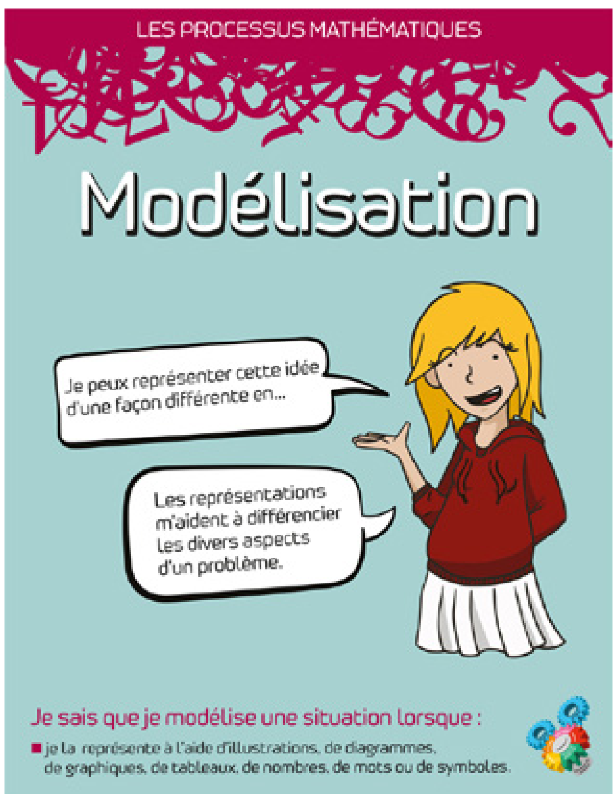
Les processus mathématiques

Adapté de EduGAINS.

Note : Dans l'expression *sélection d'outils appropriés et de stratégies de calcul*, le mot *outils* sous-entend : logiciels et applications technologiques, ainsi que matériel de manipulation.

Plusieurs processus entrent en jeu dans l'apprentissage des mathématiques. Selon le programme-cadre de mathématiques de l'Ontario, « [l]es processus mathématiques constituent les éléments essentiels d'une formation mathématique, puisqu'ils appuient l'acquisition et la mise en application de la connaissance et des habiletés mathématiques. Cette importance doit se retrouver dans un programme équilibré [à l'élémentaire et] au secondaire » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 11).

Les affiches ci-dessous, adaptées de EduGAiNS, expliquent chacun des processus mathématiques.




LES PROCESSUS MATHÉMATIQUES
Établissement de liens
Ce problème est semblable à..., car...
Je peux réutiliser ce concept mathématique afin de...
Je sais que j'établis des liens lorsque :
je fais la relation entre les nouveaux concepts appris et ceux que je comprends déjà;
je reconnais les ressemblances et les différences entre les problèmes;
je trouve des occasions d'utiliser les mathématiques dans ma vie à l'extérieur de l'école.


LES PROCESSUS MATHÉMATIQUES
Raisonnement
Puisque je connais..., je sais que...
Je sais que c'est vrai ou que c'est faux, car...
Je sais que je raisonne lorsque :
je fais des hypothèses et des prédictions;
je valide mes hypothèses et mes prédictions;
je déduis, je justifie et je conclus;
je généralise.

Affiches : Adaptées de EduGAINS.

La compréhension conceptuelle est un apprentissage durable.

La compréhension conceptuelle et la compréhension procédurale

L'élève ayant une compréhension conceptuelle comprend en quoi une idée mathématique est importante et reconnaît les contextes dans lesquels elle s'applique. Elle ou il est en mesure d'établir des liens entre diverses connaissances pour former un ensemble cohérent et de rattacher de nouvelles idées à ce qu'elle ou il sait déjà. L'apprenante ou l'apprenant montre sa compréhension conceptuelle en exprimant, en ses propres mots, les liens significatifs entre les notions mathématiques et les procédures employées. Contrairement à la mémorisation, cet apprentissage est durable.

La compréhension procédurale permet à l'élève d'être efficace et efficiente ou efficient.

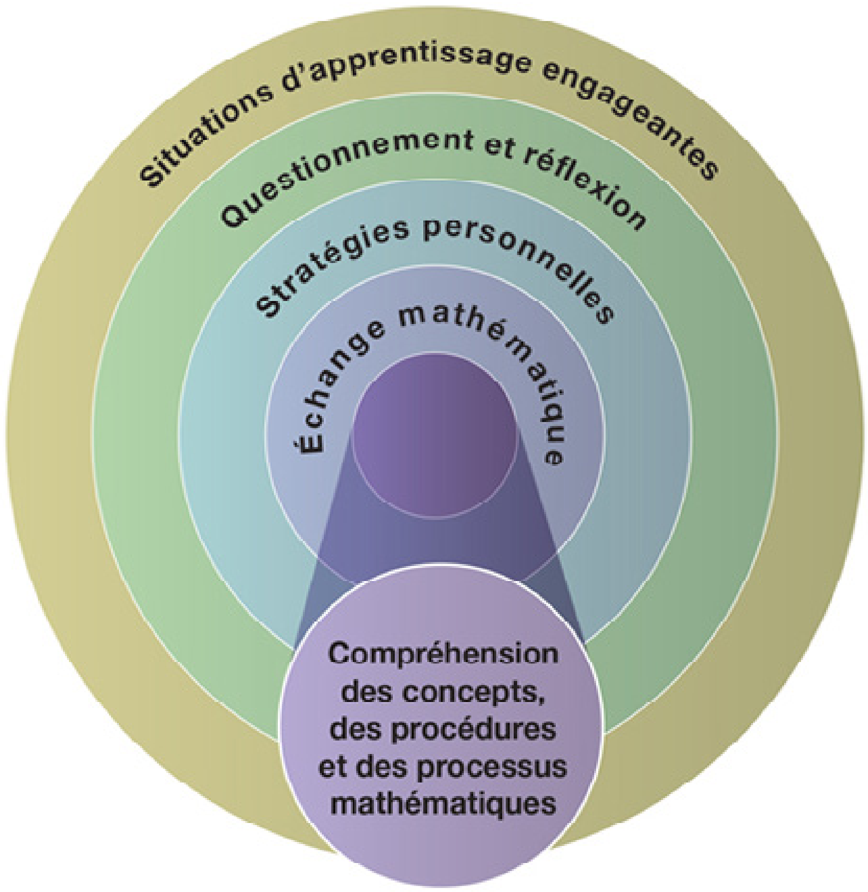
Au moment de la résolution de problèmes, l'enseignante ou l'enseignant accompagne l'élève en ce qui a trait à l'utilisation et à la compréhension des procédures. L'élève ayant une compréhension procédurale reconnaît le moment et la manière d'utiliser de façon appropriée, flexible, précise et efficace la procédure qui s'applique au contexte. Les habiletés procédurales prennent davantage de sens lorsqu'elles sont fondées sur la compréhension plutôt que sur la mémorisation. Il est important de noter que l'habileté servant à estimer un résultat, c'est-à-dire à calculer mentalement ou par écrit, à utiliser des connaissances antérieures, à comparer et à extrapoler, et ce, sans avoir recours à un calcul rigoureux, est également liée à la compréhension procédurale.

La mise en œuvre de l'enseignement efficace à l'aide de la résolution de problèmes

L'enseignement efficace des mathématiques requiert la mise en place de plusieurs composantes. La résolution de problèmes devrait être considérée comme un point de départ à la séquence d'enseignement et non uniquement comme un point d'arrivée, c'est-à-dire un « aboutissement » à l'apprentissage. En y ayant recours au début d'une situation d'apprentissage, les élèves sont encouragées et encouragés à analyser, à raisonner, à questionner et à explorer en utilisant des stratégies personnelles, et ce, en vue d'acquérir ou d'approfondir des concepts, des procédures ou des processus mathématiques.

La figure ci-dessous présente les cinq composantes d'une situation d'apprentissage, dont l'objectif est la pleine compréhension des concepts, des procédures et des processus mathématiques.

ENSEIGNEMENT PAR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES



Les composantes d'une situation d'apprentissage

Les situations d'apprentissage engageantes

ENSEIGNEMENT PAR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Une situation d'apprentissage est engageante lorsqu'elle présente un contexte qui permet aux élèves d'être actives et actifs dans leur recherche d'une solution. Pour déterminer si une situation d'apprentissage est engageante, l'enseignante ou l'enseignant doit se poser des questions afin de prendre des décisions pédagogiques éclairées au moment de choisir des résolutions de problèmes :

- Quelles sont les intentions pédagogiques de la situation d'apprentissage? A-t-elle comme objectif le développement chez les élèves de concepts, de procédures ou de processus mathématiques?
- Compte tenu de l'intention pédagogique visée, quels problèmes aideraient les élèves à comprendre les concepts, les procédures ou les processus mathématiques?
- La résolution de problèmes permet-elle aux élèves de connaître un certain succès, même en utilisant des stratégies moins efficaces?
- Quel contexte peut être utilisé pour faire en sorte que la résolution de problèmes présentée soit signifiante pour les élèves et favorise leur engagement?
- Quelles difficultés les élèves risquent-elles et risquent-ils de rencontrer? Comment remédier à ces difficultés pendant la situation d'apprentissage et à la fin de celle-ci?
- Quelles questions incitatives pourraient favoriser l'atteinte de l'objectif? Quelles grandes idées peuvent aider les élèves à établir des liens avec leurs connaissances antérieures?
- Comment les apprentissages seront-ils communiqués, discutés et récapitulés au cours de l'échange mathématique?
- Comment évaluer si les concepts, les stratégies ou les processus mathématiques ont été acquis?

Questionnement et réflexion

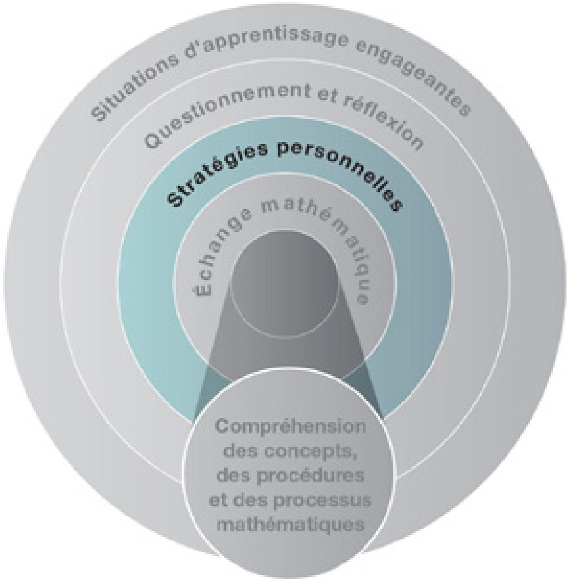
Un questionnement efficace est primordial pour guider la réflexion des élèves. Les interventions de l'enseignante ou de l'enseignant, au moment où les élèves discutent ensemble d'un problème, doivent alimenter leur raisonnement. Il est important que ces interventions n'aient pas lieu trop tôt dans la discussion afin d'assurer le développement de la persévérance chez les élèves, ou trop tard, en particulier si elles et ils sont dans une impasse, afin d'éviter la manifestation d'un sentiment de frustration. Il faut leur allouer suffisamment de temps pour qu'elles et ils soient en mesure de résoudre le problème. Lorsque les élèves travaillent en équipes, l'enseignante ou l'enseignant intervient pour bien comprendre leur raisonnement mathématique, l'orienter et le développer, ainsi que pour susciter leur réflexion (adapté d'un atelier de Cathy Fosnot présenté au Réseau des conseillers pédagogiques en mathématiques, en janvier 2013, traduction libre).

Il faut un certain temps et de la pratique pour acquérir des techniques de questionnement efficaces. Voici des stratégies aidant à les développer :

- *Faire appel à des questions qui nécessitent une compréhension […] plutôt qu'à un rappel de fait* (adapté de Baroody et Coslick, 1998, p. 17-8). Utiliser des verbes comme *expliquer*, *justifier* et *comparer* dans ses questions (p. ex., Quelle est la différence entre le volume et l'aire?).
- *Faire appel à des questions qui exigent comme réponse plus qu'un* oui *ou qu'un* non (adapté de Baroody et Coslick, 1998, p. 17-8) (p. ex., Comment le sais-tu?).
- *Faire appel à des questions qui se prêtent à un dialogue mathématique* (adapté de Baroody et Coslick, 1998, p. 17-8). Demander, par exemple, aux élèves la façon dont elles et ils ont procédé. Puis, inviter une ou un élève à expliquer un concept à une ou à un autre élève (p. ex., Comment as-tu procédé pour déterminer le 39e terme de la suite?).
- *Formuler les questions sans les qualifier de* faciles *ou de* difficiles (adapté de Baroody et Coslick, 1998, p. 17-8).
- *Laisser un délai de réflexion entre la question et la réponse* (adapté de Baroody et Coslick, 1998, p. 17-8). Attendre au moins trois secondes après avoir posé une question.

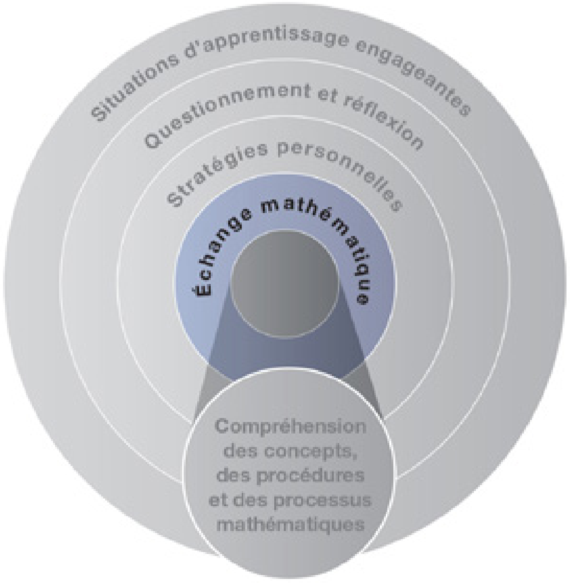
(Le texte en italique est tiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006b, fascicule 2, p. 38 et 39.)

Les stratégies personnelles



Un élément important concernant la réussite de l'apprentissage du processus de résolution de problèmes est d'encourager les élèves à proposer des stratégies et d'accepter leur choix. En utilisant des stratégies personnelles, les élèves améliorent leur compréhension des concepts. Quoique peu efficaces au début, ces stratégies évolueront en parallèle avec la compréhension des élèves. En accueillant diverses façons de résoudre un problème, en encourageant les discussions sur les stratégies et en posant des questions pertinentes, l'enseignante ou l'enseignant valorise l'effort de chacune et de chacun et s'assure que les élèves comprennent leur propre raisonnement et celui des autres. Procéder de cette façon permet aux apprenantes et aux apprenants de déceler les failles dans leur raisonnement et de modifier leurs stratégies personnelles; elles et ils apprennent ainsi à l'aide de leurs erreurs.

L'échange mathématique



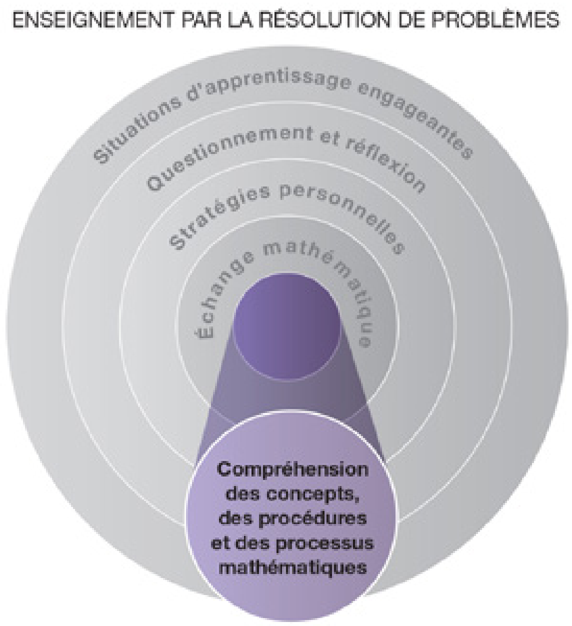
L'échange mathématique est un temps d'objectivation et de consolidation. Cela va au-delà d'une simple présentation de stratégies et de solutions liées à un problème. C'est un moment crucial au cours duquel l'enseignante ou l'enseignant pose des questions et dirige de façon stratégique les échanges afin de faire ressortir les idées mathématiques issues des travaux d'élèves.

Un échange mathématique peut se dérouler de différentes façons selon l'intention pédagogique et selon les stratégies et les solutions que proposent les élèves; par exemple, l'enseignante ou l'enseignant choisit jusqu'à trois solutions, puis demande aux élèves de les expliquer dans une séquence qu'elle ou il aura déterminée.

L'échange mathématique peut prendre la forme d'un bansho (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011a) ou d'une galerie de stratégies (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011b).

L'objectif de cette discussion en groupe-classe est de favoriser l'apprentissage selon l'intention pédagogique que vise la situation d'apprentissage. Pendant que les élèves expliquent leur raisonnement, d'autres écoutent, formulent des commentaires, posent des questions, demandent des clarifications et développent leurs idées mathématiques. L'enseignante ou l'enseignant, de son côté, intervient pour clarifier les propos et note les éléments de la discussion à côté des solutions des élèves en utilisant un langage mathématique précis, concis et explicite. Ce langage ou ces notations mathématiques permettent d'expliciter le raisonnement mathématique des élèves. Leurs idées deviennent plus formelles lorsqu'elles sont annotées à l'aide de termes mathématiques précis et de symboles. Les relations mathématiques existantes entre les solutions des élèves sont donc mises en évidence, ce qui leur permet de comprendre la manière dont les solutions sont liées les unes aux autres.

La compréhension des concepts, des procédures et des processus mathématiques



Au cours de l'échange mathématique, de nombreuses notations mathématiques ont probablement été utilisées et beaucoup de diagrammes ou de schémas ont été créés afin d'expliciter le raisonnement des élèves. L'objectif de la leçon peut donc avoir été oublié, noyé dans autant de détails.

À cette dernière étape, axée sur la compréhension des concepts, des procédures et des processus mathématiques, l'enseignante ou l'enseignant doit récapituler les idées et les stratégies mathématiques clés se rapportant au résultat d'apprentissage. Cette partie de la séquence d'enseignement se nomme *consolidation*. Elle est suivie de l'objectivation qui permet aux élèves de réfléchir sur leur apprentissage en utilisant leurs compétences métacognitives. Pour entreprendre cette réflexion, il importe de leur demander de décrire deux ou trois idées, des stratégies principales ou des processus utilisés lors de l'exploration et de consigner leur apprentissage dans un cahier ou un journal de mathématiques. Pour les élèves, l'objectivation est une étape constructive qui les aide à prendre conscience de leurs savoirs et de leur savoir-faire.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant

Dans une classe ou la résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage, l'enseignante ou l'enseignant doit être facilitatrice ou facilitateur de l'apprentissage, présenter divers types de problèmes, observer pour mieux évaluer en cours d'apprentissage, enseigner des conventions, des procédures et des algorithmes, puis consolider les savoirs.

En fournissant moins d'indices aux élèves au moment de la résolution d'un problème, l'enseignante ou l'enseignant les incite à collaborer pour proposer des hypothèses et les vérifier. Le rôle du personnel enseignant n'est pas uniquement celui de détenteur et de transmetteur du savoir. En adoptant le rôle de facilitateur, il se sert de ce que les élèves peuvent faire et, au moyen d'un questionnement stratégique, il les appuie dans le processus les menant à trouver une solution. La compréhension des concepts ne vient pas de l'élève seulement, mais des conversations entre elle ou lui et les autres, y compris son enseignante ou son enseignant. En prenant part avec d'autres à l'élaboration de la solution d'un problème, elle ou il peut arriver à acquérir le concept visé. L'apprentissage a lieu dans un contexte social, car c'est dans ce type de contexte qu'elle ou il apprend à prendre position et à développer une pensée critique relative à ses idées mathématiques ou à celles des autres.

Présenter des problèmes variés

Si l'enseignante ou l'enseignant désire que les élèves soient dans une situation d'apprentissage engageante, elle ou il doit leur présenter différents types de problèmes suscitant leur intérêt et leur curiosité, puis proposer à chacune et à chacun un défi qu'elle ou il peut réussir. En donnant aux élèves des problèmes bien détaillés comportant toutes les données, cela peut les amener à croire que l'objectif des mathématiques se résume à traduire de l'information en énoncés pour en arriver à une solution. En variant les genres de problèmes, cela incite les élèves à analyser chacun d'eux et à effectuer un raisonnement mathématique avant de choisir une stratégie appropriée.

Voici un exemple de problème ouvert et des exemples de problèmes parallèles, ainsi que leurs caractéristiques :

PROBLÈME OUVERT	PROBLÈMES PARALLÈLES
Organise un voyage à Vancouver en respectant un budget de 3 500 $.	1. Les coordonnées (8, −3) et (1, −5) sont les sommets d'un parallélogramme. Quelles pourraient être les coordonnées des autres sommets? 2. La coordonnée (8, −3) est le sommet au haut, à droite, d'un parallélogramme. Quelles pourraient être les coordonnées des autres sommets?
Caractéristiques ▶ L'énoncé est court. Le défi n'est pas nécessairement la compréhension du texte, mais plutôt la façon de résoudre le problème. ▶ L'énoncé ne donne ni la méthode ni la solution. La solution ne peut être qu'une simple utilisation ou une application de procédures vues durant le cours. ▶ Le problème ouvert, contenant peu de données explicites, est conçu pour aider les élèves à proposer des solutions multiples en faisant une analyse plus approfondie, tant sur le plan de la démarche à adopter que sur le plan des solutions les plus plausibles à proposer.	**Caractéristiques** ▶ Ces problèmes, généralement au nombre de deux, traitent de la même grande idée ou d'un même concept, mais selon différents degrés de difficulté. ▶ Les problèmes parallèles offrent la possibilité d'avoir un ensemble de questions semblables. ▶ Les problèmes parallèles permettent aux élèves de résoudre un problème selon leurs compétences. ▶ Les élèves ayant des défis à relever en mathématiques résolvent un problème plus simple, ce qui leur permet de faire un lien avec un problème plus complexe. ▶ Les problèmes parallèles peuvent être des problèmes ouverts. ▶ Ces types de problèmes contribuent à enrichir la discussion mathématique en salle de classe, puisque toutes et tous les élèves peuvent prendre part à l'échange mathématique.

Observer pour mieux évaluer en cours d'apprentissage

L'observation des élèves et la conversation avec elle et eux, au moment de la résolution de problèmes, permet à l'enseignante ou à l'enseignant :

- de cerner si les élèves comprennent l'intention pédagogique de la tâche;
- de déterminer ce que les élèves savent déjà;
- de repérer les concepts moins bien compris;
- de reconnaître la prise de risque au moment de répondre aux questions ou la proposition d'idées différentes;

- de planifier l'échange mathématique;
- de déterminer la façon dont se feront la consolidation et l'objectivation de l'apprentissage visé;
- de déterminer si les élèves peuvent évaluer la pertinence de leur démarche.

Enseigner des conventions, des procédures et l'utilisation judicieuse de modèles mathématiques

Il est vrai que la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement efficace des mathématiques, mais cela n'empêche pas de présenter aux élèves de façon plus explicite certaines conventions ou procédures, ou certains modèles mathématiques tels que les dispositions rectangulaires. L'objectif est qu'une fois maîtrisé le modèle mathématique ou la procédure serve de stratégie pour résoudre le problème. En ce qui concerne les symboles et les conventions, ils permettent aux élèves d'être plus efficaces. La résolution de problèmes aide le personnel enseignant à déceler le moment propice pour présenter aux élèves le langage et les symboles mathématiques appropriés à la situation d'apprentissage. Leur enseigner le langage et les symboles mathématiques au fur à mesure qu'elles et ils en ont besoin, cela les aide à les utiliser de façon contextualisée et appropriée. Peut-être est-ce aussi là une piste pour réduire la fréquence de la question que posent souvent les élèves : « À quoi cela sert-il d'apprendre cela? »

Consolider les savoirs

L'intention pédagogique de présenter aux élèves des problèmes au commencement d'une situation d'apprentissage, comme il a été décrit précédemment, a pour but d'explorer des concepts, de miser sur l'appropriation de certains processus (p. ex., raisonner, modéliser et réfléchir) ou de poursuivre le développement de différentes habiletés (p. ex., analyser, justifier et appliquer). L'enseignante ou l'enseignant doit aussi faciliter la consolidation des savoirs. L'échange mathématique est un moment propice pour déterminer ce qui doit être consolidé en vue de planifier les prochaines étapes. En donnant à des élèves une série de problèmes semblables à résoudre à la suite de l'exploration, la valeur pédagogique devient la consolidation de la compréhension d'un concept ou l'habileté à utiliser un algorithme, une procédure ou une stratégie. À ce stade, les élèves utilisent les connaissances acquises pour effectuer un travail sans être nécessairement en mode apprentissage.

LA CONSOLIDATION	L'OBJECTIVATION
C'est le moment où l'élève acquiert une compréhension solide d'un concept ou d'une habileté. Les échanges mathématiques, les exercices (minileçons, jeux et centres d'apprentissage) et le questionnement judicieux favorisent la consolidation des apprentissages en cours.	C'est le temps où l'élève prend conscience des actions posées, des stratégies utilisées, des concepts explorés, de ses forces et des défis qu'elle ou il doit relever. Cette prise de conscience devient un objet de raisonnement et de métacognition, et lui permet de se fixer de nouveaux objectifs et de déterminer les moyens pour y parvenir.